LÊ HẢI CHÂU
(Nhà giáo Nhân dân)

TÌM CHÌA KHOÁ VÀNG GIẢI BÀI TOÁN HAY

10-11

Dùng cho lớp 10-11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU

Nhà giáo Nhân dân

TÌM CHÌA KHÓA VÀNG GIẢI BÀI TOÁN HAY

Dành cho các bạn có trình độ lớp 10 - lớp 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: MINH KHAI

Sửa bài: THÁI VĂN

Chế bản: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Trình bày bìa: THÁI HỌC

Đối tác liên kết xuất bản:
NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

Tìm chìa khóa vàng giải bài toán hay

Mã số: 1L – 08ĐH2011
In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ti TNHH in bao bì Phong Tân.
Số xuất bản: 89 – 2011/CXB/13 – 02/ĐHQGHN, ngày 19/1/2011.
Quyết định xuất bản số: 14LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2011.

Vài dòng mở đầu

Các bạn trẻ yêu toán thân mến.

Vườn hoa toán học rất đa dạng và phong phú, có nhiều bông hoa rực rỡ đầy hương sắc. Đó là những bài toán hay, đòi hỏi phát huy trí thông minh và óc sáng tạo khi giải.

Muốn giải một bài toán, sau khi đọc kĩ đề bài, điều đầu tiên và quan trọng là cách suy nghĩ tìm ra đường lối giải, đó chính là :

"Tìm chìa khóa vàng giải bài toán hay"

Cuốn sách này viết cho các bạn có trình độ Trung học phổ thông (THPT)

nội dung được trình bày theo từng xoắn (§). Ở mỗi xoắn đều gồm các mục :

A. *Những kiến thức cần nắm vững*, phục vụ chủ yếu cho việc giải các đề toán sau đó.

B. *Các bài toán điển hình*, gồm những bài toán hay và thông minh.

C. *Cách giải và lời bình*, đặc biệt phần *lời bình* nhằm khai thác đề bài đã ra và được trình bày với những bài toán tương tự khó hơn, hoặc những bài toán mở rộng, những bài toán liên quan ra dưới dạng khác.

D. *Bạn có biết ?* gồm những mẩu chuyện toán học vừa nâng cao hiểu biết, mở rộng tầm mắt, vừa có tính chất giải trí.

Mong rằng cuốn sách này giúp các bạn trẻ yêu toán gặt hái được nhiều thành công trong việc học giỏi môn Toán, "môn thể dục của trí tuệ".

Hà Nội, dịp đại lễ 1000 năm Thăng Long 2010

LÊ HẢI CHÂU

§1. THỬ TRÍ THÔNG MINH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

Đây là những *câu hỏi, câu đố ngắn gọn, hấp dẫn và thông minh*, đòi hỏi lập luận, phân tích có lý, hợp lôgic, vì nội dung tương đối thiết thực, phản ánh những sự kiện trong đời sống muôn màu muôn vẻ.

Để giải đáp cần đọc kĩ từng câu hỏi, câu đố, suy ngẫm xem nội dung cho cái gì, tìm cái gì và cách giải có khi độc đáo, thông minh. *Hãy tìm ra chìa khóa vàng* nhằm giúp cho việc giải toán được ngắn gọn, nhanh chóng.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Có một hình vuông gồm 16 ô được điền các số 1, 2, 3 và 4 sao cho mỗi hàng hoặc mỗi cột không có số nào bằng nhau. Sau đó xóa đi 12 số sao cho bảng chỉ còn lại 4 số như ở hình vẽ (hình 1). Hỏi có thể phục hồi bảng số ở hình vuông ban đầu được không ?

1			
		2	
	3		
			4

H.1

2. Ba ông Xuân, Hạ, Thu cùng ba bà Cúc, Huệ, Lan là vợ của các ông, nhưng không biết họ là ba cặp vợ chồng nào. Chỉ biết rằng sau khi vào một siêu thị mua hàng thì mỗi người mua a đồ vật thì phải trả a^2 nghìn đồng và người chồng nào cũng mua nhiều hơn vợ mình là 48 nghìn đồng. Ngoài ra ông Xuân mua nhiều hơn bà Huệ 9 đồ vật, ông Hạ mua nhiều hơn bà Cúc 7 đồ vật.

Hỏi đó là ba cặp vợ chồng nào ?

3. Chị Đông lấy 3 quả cam từ giỏ cam, sau đó lấy $\frac{1}{3}$ số cam còn lại và 3 quả nữa. Trong giỏ hiện còn lại một số cam bằng $\frac{1}{2}$ số cam ban đầu.

Hỏi lúc đầu trong giỏ có bao nhiêu quả cam ?

4. Bạn Khuê hỏi số nhà của bạn Nguyên. Bạn Nguyên trả lời : Đó là số lớn nhất có ba chữ số mà khi chia cho 43 thì được thương và số dư giống nhau.

Bạn Nguyên lại hỏi số nhà của bạn Khuê. Bạn Khuê trả lời : Đó là số có hai chữ số khi chia cho số viết theo thứ tự ngược lại cũng được thương và số dư giống nhau.

Hãy tìm số nhà của bạn Nguyên và bạn Khuê.

5. Nếu các số tự nhiên a, b, c, d thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ thì tổng a + b + c + d có thể là hợp số không ?

6. Chứng tỏ rằng biểu thức $A = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+c} + \frac{d+a}{c+b}$ là một số nguyên nếu $\frac{a}{b+c+d} = \frac{b}{c+d+a} = \frac{c}{d+a+b} = \frac{d}{a+b+c}$.

7. Tìm số t biết rằng một trong ba mệnh đề sau là đúng :

a) t là số nguyên.

b) $t^2 - 3t$ là số nguyên âm. c) $t + \frac{1}{t}$ là số nguyên dương.

8. Chứng minh rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$ và $z^2 + t^2 = 1$ thì $|xz - yt| \leq 1$.

9. Chứng minh rằng nếu $a^4 = b^4 + c^4 - b^2c^2$ và $b^4 = c^4 + a^4 - c^2a^2$ thì

$$c^4 = a^4 + b^4 - a^2b^2.$$

10. Tìm tất cả số tự nhiên n sao cho n^2 là số có 12 chữ số dạng :

n^2 = 2525******89 (sáu dấu * là sáu chữ số không bắt buộc phải giống nhau).

11. Bạn Bách nghĩ trong đầu một số là số chính phương, đem khai phương nó rồi cộng thêm 2, được bao nhiêu lại khai phương rồi cộng thêm 2. Làm như vậy sẽ được số đang nghĩ. Hỏi đó là số nào ?

12. Chứng tỏ rằng : a) $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$

b) $(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}).\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = -2$.

13. Tìm số M bắt đầu và tận cùng bằng chữ số 5 mà khi chuyển chữ số đầu về cuối số sẽ được số mới giảm đi 5 lần so với số cũ.

14. a) Biết rằng $\sqrt[3]{***9}$ là một số nguyên. Tìm số nguyên đó.

b) Tại sao đẳng thức $\sqrt[4]{234254} = 22$ không đúng ?

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Ô có dấu sao (*) (bảng a) chỉ có thể là 3 hoặc 4, vì nếu là 1 thì cột 1 đã có 1, nếu là 2 thì hàng 2 đã có 2.

Nếu là 3 ta sẽ có bảng (b).

Nếu là 4 ta sẽ có bảng (c).

1			
*		2	
	3		
			4

(a)

1	2	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2
2	1	3	4

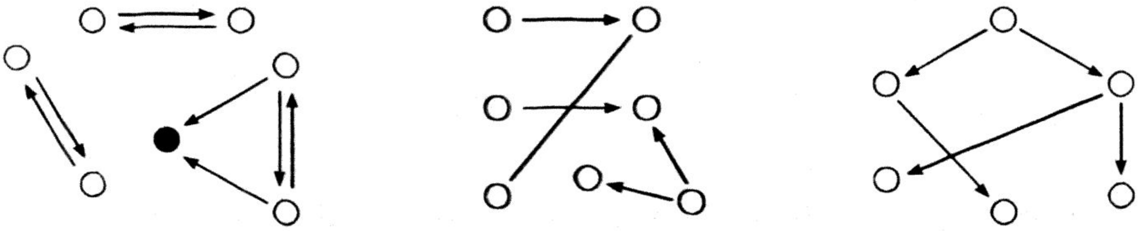
(b)

1	4	3	2
4	1	2	3
2	3	4	1
3	2	1	4

(c)

Như vậy ta có hai cách lập bảng số thỏa mãn bài ra. Do đó không thể chỉ phục hồi lại một bảng được.

- ***Lời bình :*** *Cho ba hình vẽ sau* (hình 2a, b, c) :



(a) (b) (c)

H.2

Ở một trong ba hình vẽ trên, mũi tên đi từ người này đến người kia khi người thứ nhất là ông.

Trên một hình khác mũi tên chỉ người thứ nhất là bố. Trong hình vẽ còn lại người đầu là anh hoặc em trai người kia. Hãy tìm xem có một cô bé tên là Ngọc ở đâu ?

Giải : Hình (a) không là ông, không là bố, vì không thể có hai người vừa là ông hoặc bố của nhau, vậy hình (a) là anh, em.

Hình (b) không là bố vì không thể có hai người bố, vậy hình (b) là ông.

Xét hình (a) ta suy ra được cô bé Ngọc là ●, vì những loại hình O ⇄ O là chỉ quan hệ anh, em trai của nhau.

2. Theo bài ra, nếu một ông mua x đồ vật thì phải trả x^2 nghìn đồng, nếu vợ ông ta mua y đồ vật thì phải trả y^2 nghìn đồng. Ta có :

$$x^2 - y^2 = 48 \quad \text{hay} \quad (x + y)(x - y) = 48.$$

Các số x và y phải nguyên dương nên ta phải có $x + y$ và $x - y$ đều chẵn và $x + y > x - y$. Phân tích số 48 ra thừa số ta thấy rằng chỉ có ba khả năng sau :

$$48 = 2.24 = 4.12 = 6.8$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x_1 - y_1 = 2 \\ x_1 + y_1 = 24 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 - y_2 = 4 \\ x_2 + y_2 = 12 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_3 - y_3 = 6 \\ x_3 + y_3 = 8 \end{cases}$$

Giải các hệ này ta được :

$$x_1 = 13, y_1 = 11; \quad x_2 = 8, y_2 = 4; \quad x_3 = 7, y_3 = 1.$$

Với các giá trị của x và y mà hiệu bằng 9 thì ông Xuân đã mua 13 đồ vật, bà Huệ đã mua 4 đồ vật. Tiếp theo ông Hạ đã mua 8 đồ vật, bà Cúc đã mua 1 đồ vật.

Vậy ba cặp vợ chồng là :

$$\begin{cases} \text{ông Xuân : 13} \\ \text{bà Lan : 11} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{ông Hạ : 8} \\ \text{bà Huệ : 4} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{ông Thu : 7} \\ \text{bà Cúc : 1} \end{cases}$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm câu đố sau :

Trong cuốn sổ của một cửa hàng có một trang bị nhòe mực như sau :

Ngày 1-10-2010 ... rổ lạc
mỗi rổ cân nặng 4936 gam,
tổng cộng là ... 728 gam.

Người phụ trách cửa hàng không biết làm thế nào tìm lại các số đó và chỉ nhớ rằng số rổ lạc là một số nguyên dương và số chỉ khối lượng lạc mua được là một số có sáu chữ số.

Hãy tính hộ xem các chữ số bị nhòe mực là những chữ số gì ?

Giải : Gọi số rổ lạc là x, khối lượng lạc sẽ là 4936x (gam).

Gọi số gồm ba chữ số đầu tiên bị nhòe (chỉ khối lượng) là y, số chỉ khối lượng bây giờ là : 1000y + 728 (gam)

Ta có phương trình : $4936x = 1000y + 728$ hay $617x - 125y = 91$,

với điều kiện x, y nguyên dương và $y < 1000$. Giải ra tìm được :

$$x = 125t_1 - 27; \quad y = 617t_1 - 134.$$

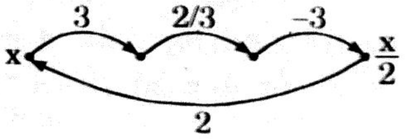
Ta biết rằng $100 \le y < 1000$, hay $100 \le 617t_1 - 134 < 1000$.

Do đó $t_1 \ge \frac{234}{617}$ và $t_1 < \frac{1134}{617}$. Rõ ràng t_1 chỉ có một giá trị nguyên là 1.

Từ đó x = 98, y = 483.

Vậy cửa hàng đã bán 98 rổ lạc mà khối lượng là 483728 gam.

3. Gọi x là số quả cam lúc đầu trong giỏ. Ta có thể vẽ sơ đồ - grap sau :



Vì số $x = \left[\frac{2}{3}(x - 3) - 3\right].2$ biểu diễn một điểm trên sơ đồ - grap nên

$$x = \left[\frac{2}{3}(x + 3) - 3\right].2 \quad \text{hay} \quad x = \frac{4}{3}x - 10. \quad \text{Từ đó } x = 30.$$

Vậy lúc đầu trong giỏ có 30 quả cam.

- ***Lời bình :*** Ta hãy giải bài toán trong trường hợp tổng quát :

Từ giỏ cam ban đầu lấy ra n quả và $\frac{1}{n}$ số cam còn lại. Sau đó lại lấy ra n quả thì trong giỏ số cam còn lại bằng $\frac{1}{2}$ số cam ban đầu. Hỏi lúc đầu giỏ có bao nhiêu quả cam ? Với số tự nhiên n bằng bao nhiêu thì bài toán có lời giải ?

Giải : Gọi x là số cam ban đầu. Lần thứ nhất lấy ra $n + \frac{1}{n}(x - n)$ quả.

Trong giỏ còn : $x - \left[n + \frac{1}{n}(x - n)\right] = (x - n).\frac{n-1}{n}$ (quả).

Lần thứ hai lấy n quả và số cam còn lại là : $(x - n).\frac{n-1}{n} - n$

Ta có phương trình sau : $(x - n).\frac{n-1}{n} - n = \frac{1}{2}x$

Giải ra được : $x = 4n + 6 + \frac{12}{n-2}$.

Vì x phải là số tự nhiên nên $\frac{12}{n-2}$ phải nguyên. Nhưng các ước của 12 là 1, 2, 3, 4, 6 và 12 nên ta có các khả năng sau :

$n - 2 = 1$ hay $n = 3$ (trường hợp của bài toán ở trên)

$n - 2 = 2$ hay $n = 4$; $n - 2 = 3$ hay $n = 5$

$n - 2 = 4$ hay $n = 6$; $n - 2 = 6$ hay $n = 8$

$n - 2 = 12$ hay $n = 14$.

4. a) Gọi n là số nhà của bạn Nguyên, ta có đẳng thức sau :

$$n = 43q + q = 44q.$$

Số q phải lớn nhất để n là số lớn nhất có ba chữ số.

Như vậy số q phải là 22 để được số n bằng 968.

Số nhà của bạn Nguyên là 968 (968 chia cho 4 được thương là 22 và dư 22).

b) Gọi p là số nhà của bạn Khuê, với $p = 10x + y$. Ta có :

$$10x + y = (10y + x)q + q \quad \text{hay} \quad (10 - q)x - (10q - 1)y = q.$$

Nếu $q = 1$ ta được đẳng thức $9(x - y) = 1$, vô lí !

Nếu $q = 2$ ta được $8x - 19y = 2$, suy ra y chẵn.

Với $y = 2$ thì $x = 5$ và với $y = 4, 6, 8$ thì vế phải không chia hết cho 8. Khi đó ta được nghiệm là $p = 52$.

Nếu $q = 3$ thì từ đẳng thức $7x - 29y = 3$ $(y \le 2)$ ta sẽ được một phân số và với $y \ge 3$, $x > 0$ thì vô nghiệm.

Nếu $q = 4$ thì $6x - 39y = 4$, vô lí vì 4 không chia hết cho 3.

Cuối cùng nếu $q \ge 5$ thì $5x \ge (10 - q)x = (10q - 1)y + q \ge 49y + q \ge 54$

Từ đó $x \ge 1$, và số phải tìm $p = 52$.

Vậy số nhà bạn Khuê là 52.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Một bà mang gà đi chợ bán cho ba người. Người đầu mua một nửa số gà và một con gà, người thứ hai mua một nửa số gà còn lại và hai con gà, người thứ ba mua một nửa số gà còn lại và ba con gà thì vừa hết gà. Hỏi cả ba người đã mua được mấy con gà ?

Giải : Gọi x là số gà ba người đã mua được. Người thứ nhất đã mua $\frac{1}{2}x + 1$, người thứ hai đã mua $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x - 1\right) + 2 = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$, cả hai người đã mua được $\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$. Số gà còn lại là : $x - \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}$.

Người thứ ba đã mua $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\right) + 3 = \frac{1}{8}x + \frac{7}{4}$.

Ta có phương trình sau : $\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}x + \frac{7}{4}\right) = x$.

Giải ra được $x = 34$.

Vậy cả ba người đã mua được 34 con gà.

5. Do số dạng $n^2 - n$ (n là số tự nhiên) luôn là số chẵn,

nên số $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)$ cũng là số chẵn, vì theo bài ra $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ là số chẵn.

Nhưng tổng $a + b + c + d$ luôn lớn hơn 2 nên tổng này phải là một hợp số.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm tất cả số nguyên tố p và q sao cho các số 7p + 9 và pq + 11 cũng là số nguyên tố.*

Giải : Nếu số $pq + 11$ là nguyên tố thì nó là số lẻ, như thế một trong các số p và q phải chẵn tức là bằng 2.

Giả sử $p = 2$ tức là các số $q + 14$ và $2q + 11$ là số nguyên tố. Nếu khi chia cho 3 mà số q cho số dư 1 thì $q + 14$ chia hết cho 3. Nếu số dư này bằng 2 thì $2q + 11$ chia hết cho 3.

Do đó q chia hết cho 3, tức là $q = 3$. Thử lại thấy rằng $p = 2$, $q = 3$ thỏa mãn bài ra.

Tương tự, ta có thể chứng minh rằng $p = 3$, $q = 2$ cũng thỏa mãn bài ra.

6. Ta cộng thêm 1 vào bốn số hạng của tổng A được đẳng thức :

$$\frac{a+b+c+d}{b+c+d} = \frac{a+b+c+d}{c+d+a} = \frac{a+b+c+d}{d+a+b} = \frac{a+b+c+d}{a+b+c}.$$

Nếu tử $a + b + c + d \neq 0$ thì suy ra các mẫu bằng nhau, từ đó $a = b = c = d$. Vậy tổng $A = 4$.

Nếu tử $a + b + c + d = 0$ thì tổng A bằng -4.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$B = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b},$$ *nếu a, b, c, d dương.*

Giải : Vì với x, y > 0 ta có :

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy, \qquad \frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2},$$ nên :

$$B = \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a}\right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b}\right)$$

$$= \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)}$$

$$\geq 4.\frac{a^2 + ad + bc + c^2}{(a+b+c+d)^2} + 4.\frac{b^2 + ab + cd + d^2}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= 2.\frac{(a+b+c+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 2$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 2, chẳng hạn khi a = b = c = d và trong trường hợp tổng quát khi b + c = d + a, c + d = a + b, a = c, b = d, tức là khi a = c, b = d.

7.- Xét a, b đúng; c sai.

$$\begin{cases} t \text{ nguyên} \\ t^2 - 3t \text{ nguyên âm, tương dương với } 0 < t \text{ nguyên} < 3, \text{ hay } t = 1; 2 \end{cases}$$

Do $t + \frac{1}{t}$ không phải nguyên dương, suy ra t = 2.

- Xét b, c đúng; a sai.

$t^2 - 3t = z$ nguyên âm, ta có $\Delta = 9 + 4z \geq 0$ hay $z \geq -\frac{9}{4}$. Suy ra z = –2; –1.

Với z = –2 thì t = 2, t = 1, trái với bài ra là t không nguyên (do a sai). Vậy không tồn tại t.

Với z = –1 thì $t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn bài ra.

- Xét a, c đúng; b sai.

Khi đó do t nguyên (câu a) và $t + \frac{1}{t}$ nguyên (câu c), suy ra $\frac{1}{t}$ nguyên, do đó t = ±1.

Nhưng từ (c) thì $t + \frac{1}{t}$ nguyên dương nên t = 1 thỏa mãn (b), do đó không tồn tại t.

Tóm lại, có ba giá trị của t là : $t_1 = 2$ và $t_{2,3} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng trong các số tự nhiên lớn hơn 1, tồn tại một bộ duy nhất bốn số sao cho tích ba số bất kì trong chúng cộng thêm 1 chia hết cho số còn lại. Tìm bốn số đó.

Giải : Gọi bốn số đó là a, b, c, d.

Do $abc + 1 \vdots d$ (1), $bcd + 1 \vdots a$ (2), $cda + 1 \vdots b$ (3) và $dab + 1 \vdots c$ (4) nên a, b, c, d đôi một khác nhau và nguyên tố cùng nhau : $a < b < c < d$.

Xét tích (1).(2).(3).(4) được :

$$a^3b^3c^3d^3 + a^2b^2c^2d^2(a + b + c + d) + abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + \\ + (abc + bcd + cda + dab + 1) \vdots abcd$$

hay $abc + bcd + cda + dab + 1 = k.abcd$ (k tự nhiên).

Từ đó : $k = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{abcd}$.

Do $a < b < c < d$ và $a, b, c, d > 1$ nên : $a \geq 2$, $b \geq 3$, $c \geq 4$, $d \geq 5$,

do đó : $k = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \ldots < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{2.3.4.5} = \dfrac{155}{120} < 2$

Suy ra $k = 1$.

Vậy $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{abcd} = 1$.

Giải ra được : $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$, $d = 43$ (Rõ ràng $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{43} = 1$).

8.– *CÁCH 1.* Xét bất đẳng thức $(x + z)^2 + (y - t)^2 \geq 0$

hay $x^2 + z^2 + y^2 + t^2 + 2(xz - yt) \geq 0$.

Vì $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2$ nên từ bất đẳng thức cuối suy ra $xz - yt \geq -1$ (1)

Tương tự, từ bất đẳng thức $(x - z)^2 + (y + t)^2 \geq 0$ ta có :

$(yt - xz) \geq -1$ hay $xz - yt \leq 1$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $|xz - yt| \leq 1$.

– *CÁCH 2.* Nhân các đẳng thức đã cho được :

$$x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 = 1, \text{ hay}$$

$$x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + 2xyzt - 2xyzt = 1.$$

Từ đó : $(xz - yt)^2 + (yz + xt)^2 = 1$.

Vì $(yz + xt)^2 \geq 0$ nên $(xz - yt)^2 \leq 1$, tức là $|xz - yt| \leq 1$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh rằng nếu*

  $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ *và* $\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=\frac{2}{z}$ *(với* $y > 0,\ \frac{y}{2} < z < 2y,\ y \neq z$*) thì* $x + t > y + z$.

Giải : Từ điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ suy ra $x = \frac{yz}{2z-y}$ (1)

Từ điều kiện $\frac{1}{y}+\frac{1}{t}=\frac{2}{z}$ suy ra $t = \frac{yz}{2y-z}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$(x + t) - (y + z) = \frac{yz}{2z-y} + \frac{yz}{2y-z} - (y + z) = \frac{(y+z)(y-z)^2}{(2z-y)(2y-z)}.$$

Từ giả thiết suy ra : $y + z > 0$ (vì $y > 0$ và $\frac{y}{2} < z < 2y$),

$$(y - z)^2 > 0,\ 2z - y > 0,\ 2y - z > 0,$$

vì thế hiệu ở trên dương, vậy $x + t > y + z$.

9. Cộng hai đẳng thức đã cho được : $2c^4 = (a^2 + b^2)c^2$, suy ra $c^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

Thay vào đẳng thức thứ nhất được :

$$a^4 = b^4 + \frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}{4} - \frac{a^2b^2 + b^4}{2},$$ hay rút gọn được $a = b$.

Suy ra $a = 0$, tức là $a = b = c$. Do đó đẳng thức cuối $c^4 = a^4 + b^4 - a^2b^2$ luôn đúng.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

  Viết đa thức $t^8 + 4t^2 + 4$ *dưới dạng tích của hai đa thức bậc bốn.*

  Giải : Ta cộng và trừ đa thức $4t^6 + t^4 + 4t^2$ vào đa thức đã cho được :

$$(t^8 + 4t^2 + 4) + (4t^6 + 8t^4 + 4t^2) - (4t^6 + 8t^4 + 4t^2)$$
$$= (t^8 + 4t^4 + 4 + 4t^6 + 4t^4 + 8t^2) - 4t^2(t^4 + 2t^2 + 1)$$
$$= (t^4 + 2t^2 + 2)^2 - [2t(t^2 + 1)]^2$$

Vậy ta có :

$$t^8 + 4t^2 + 4 = (t^4 + 2t^2 + 2 + 2t^3 + 2t).(t^4 + 2t^2 + 2 - 2t^3 - 2t).$$

10. Hai chữ số cuối cùng của số phải tìm có thể là : 17, 33, 67, 83 (có thể chứng minh rằng số nhỏ nhất bắt đầu bằng 19 và tận cùng bằng 89 là số $1912689 = 1383^2$, vì chữ số cuối cùng có thể là 3 hoặc 7 mà bình phương của tất cả số có hai chữ số tận cùng bằng 3 hoặc 7 là 17, 33, 67, 83).

Muốn bốn chữ số đầu của bình phương số phải tìm là 2525 thì phải thỏa mãn bất đẳng thức :

$$2525.10^8 < x^2 < 2526.10^8, \text{ tức là } \sqrt{2525}.10^4 < x < \sqrt{2526}.10^4$$

Ta biết rằng $\sqrt{2525} = 50,2493...$; $\sqrt{2526} = 50,2593...$

Do đó : $502493 < x < 502594$.

Trong khoảng này chỉ có bốn số tận cùng bằng 17, 33, 67, 83 là : 502517, 502533, 502567 và 502583.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Đúng hay sai khi cho rằng $a + b < c$ nếu $c > 0$ và $a^3 + b^3 + 3abc < 0$?

Giải : Giả sử $c > 0$ và $a^3 + b^3 + 3abc < 0$. Chia cả hai vế của đẳng thức cuối cho số dương c^3 rồi đặt $\frac{a}{c} = u$, $\frac{b}{c} = v$ ta được bất đẳng thức :

$$u^3 + v^3 + 3uv < 0 \qquad (1)$$

hay $$(u + v)^3 - 3uv(u + v - 1) < 0 \qquad (2)$$

Giả sử $u + v \geq 1$. Nếu u và v là hai số trái dấu thì vế trái của bất đẳng thức (2) là dương, nếu chúng cùng dấu thì từ $u + v \geq 1$ suy ra u và v dương trái với bất đẳng thức (1).

Vậy ta phải có $u + v < 1$, tức là $a + b < c$.

11. Giả sử số bạn Bách nghĩ trong đầu là n^2 (n là số tự nhiên).

Theo bài ra thì : $\sqrt{n+2} + 2 = n^2$.

Nhưng với $n > 2$ thì :

$$\sqrt{n+2} + 2 < \sqrt{n+n} + n < \sqrt{nn} + n = 2n < n^2 \text{ vì thế } n \leq 2.$$

Vậy rõ ràng ta có $n = 2$ và số bạn Bách đã nghĩ trong đầu là 4.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm tất cả số tự nhiên n trong đoạn 1000 đến 2000 sao cho $a_n = \sqrt{57121 + 35.n}$ là số tự nhiên.*

Giải : Theo bài ra ta có $1000 \leq n \leq 2000$, nên :

$$a_n \geq \sqrt{57121 + 35.1000} = 303,51...$$

và $$a_n \leq \sqrt{57121 + 35.2000} = 356,54... \quad \text{tức là} \quad 304 \leq a_n \leq 356,$$

vì $57121 = 1632.35 + 1$ nên $a_n = \sqrt{35(n + 1632) + 1}$,

tức là số $a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1)$ chia hết cho $35 = 5.7$.

Do đó : hoặc $a_n - 1$, hoặc $a_n + 1$ chia hết cho 7, tức là :

hoặc $a_n = 7k + 1$, hoặc $a_n = 7k - 1$.

– Trong trường hợp thứ nhất, ta có : $304 \le 7k - 1 \le 356$, tức là $44 \le k \le 50$.

Với $k = 44, 45, ..., 50$ ta được : $a_n^2 - 1 = (7k + 1)^2 - 1$, ta chọn trong số đó những số chia hết cho 5 sẽ được bốn giá trị của $n = \dfrac{a_n^2 - 1}{35} - 1632$ là :

1096 ($k = 44$, $a_n = 309$); 1221 ($k = 45$, $a_n = 316$);

1749 ($k = 49$, $a_n = 344$) và 1888 ($k = 50$, $a_n = 351$).

– Trong trường hợp thứ hai, tức là khi $a_n = 7k - 1$ và $45 \le k \le 51$, tương tự như trên ta cũng tìm được bốn giá trị của n là :

1185 ($k = 45$, $a_n = 314$); 1312 ($k = 46$, $a_n = 321$);

1848 ($k = 50$, $a_n = 349$) và 1989 ($k = 51$, $a_n = 356$).

12. a) Ta phải giải phương trình $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = x$.

Lập phương hai vế và tính toán được :

$$3\sqrt[3]{49 - 50}\left(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}\right) = x^3 - 14,$$

hay $-3x = x^3 - 14$, tức là $x^3 + 3x - 14 = 0$

Phương trình này chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 2$. Do đó ta chứng tỏ được : $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = 2$.

b) Ta có : $\left(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right).\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} =$

$$= \left(\sqrt[6]{2^2 + 2.2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$= \sqrt[6]{(2 + \sqrt{5})^2} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}).\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}.\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 2\sqrt[3]{2^2 - (\sqrt{5})^2} = -2.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tính giá trị các biểu thức sau :*

$$A = \sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}};$$

$$B = \left(\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{17}}{2}\right)\cdot\left(\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{17}}{2} - 5\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{17}}{2} - \sqrt{10}\right)\cdot\left(\frac{5 + \sqrt{10} + \sqrt{17}}{2} - \sqrt{17}\right).$$

Giải :

$$A = \sqrt{\frac{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 8\sqrt{3} + 12 + 4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 2}$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{2}(2+2\sqrt{3}) + 2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}(2+2\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$

$$B = \sqrt{\frac{5+\sqrt{10}+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{17}-5}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{17}-\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{5+\sqrt{10}-\sqrt{17}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(5+\sqrt{10})^2-17}{4}\cdot\frac{17-(5-\sqrt{10})^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{18+10\sqrt{10}}{4}\cdot\frac{10\sqrt{10}-18}{4}} = \sqrt{\frac{676}{4.4}} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$$

13. Số phải tìm có dạng $\overline{5...xyz5}$. Ta có thể viết :

$$\begin{array}{r} ...xyz55 \\ \times \quad\quad 5 \\ \hline 5...xy75 \end{array}$$

Từ đó sẽ tìm được z = 7, y = 7, x = 8, ... Quá trình này sẽ kéo dài và sẽ được số cần tìm là một số rất lớn gồm 41 chữ số :

M = 51020408132653061224489795918367346938775.

- ***Lời bình :*** Giải thêm hai bài toán sau :

1. Tìm tất cả số nguyên a và b thỏa mãn đẳng thức : 2ab + a + b = 83.

2. Tìm ba chữ số x, y, z biết rằng đẳng thức : $\sqrt{\underbrace{\overline{xx...x}}_{2n} - \underbrace{\overline{yy...y}}_{2n}} = \underbrace{\overline{zz...z}}_{n}$

được thỏa mãn với ít nhất hai giá trị của n.

Giải :

1. Nhân hai vế của đẳng thức với 2 rồi thêm 1 vào hai vế được :

$$(2a + 1)(2b + 1) = 167.$$

Do 167 là số nguyên tố nên ta có bốn cách viết :

$$167 = 1.167 = 167.1 = (-1).(-167) = (-167).(-1)$$

Từ đó ta được bốn cặp giá trị của a và b sau đây :

(0; 83), (83; 0), (–1; –84) và (–84; –1).

2. Đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng :

$$x.\frac{10^{2n}-1}{9} - y.\frac{10^n-1}{9} = z^2.\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2,$$

hay $10^n(9x - z^2) = 9y - 9x - z^2.$

Nếu $9x - z^2 \neq 0$ thì với hai giá trị khác nhau của n không thể thỏa mãn đẳng thức đã cho. Vì thế $9x = z^2$, $9y = 9x + z^2$, từ đó $y = 2x$.

Do x, y, z là số có một chữ số nên : hoặc $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$;

hoặc $x = 4$, $y = 8$, $z = 6$.

14. a) Căn bậc ba của một số có bốn chữ số là một số có hai chữ số. Lập phương của một số sẽ tận cùng bằng 9 khi và chỉ khi số đó tận cùng bằng 9.

Ngoài ra $29^3 > 10000$. Từ đó suy ra $\sqrt[3]{***9} = 19$.

b) Lũy thừa bậc bốn của một số nguyên chỉ có thể tận cùng bằng 0, 1, 5 và 6. Vì thế đẳng thức đã cho là sai.

- ***Lời bình :*** Giải thêm câu đố sau :

Lũy thừa nào lớn hơn :

a) 3^{11} *hay* 17^{14} *?* *b)* 100^{20} *hay* 9850^{10} *?*

Giải : Ta có :

a) $3^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$. Vậy $3^{11} < 17^{14}$.

b) $9850^{10} < 10000^{10} = (100^2)^{10} = 100^{20}$. Vậy $9850^{10} < 100^{20}$.

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Bảy số nguyên tố đặc biệt

Có bảy số nguyên tố đặc biệt là :

31; 331; 3331; 33331; 333331; 3333331 và 33333331.

Tất cả bảy số nguyên tố này xuất phát từ một công thức

$$a_k = \frac{1}{3}(10^k - 7) \quad \text{với } k = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \text{ và } 8.$$

Nhưng với $k = 16m + 9$ trong đó $m = 0, 1, 2, \ldots$, thì số a_k lại chia hết cho 17.

Số nguyên tố liên tiếp với giai thừa

1. Hai số nguyên tố liên tiếp :

$$2! + 1.2 + 1 = 5$$
$$2! + 2.2 + 1 = 7.$$

2. Bốn số nguyên tố liên tiếp :

$$4! + 1.4 + 1 = 29$$
$$4! + 2.4 - 1 = 31$$
$$4! + 3.4 + 1 = 37$$
$$4! + 4.4 + 1 = 41.$$

3. Sáu số nguyên tố liên tiếp :

$$6! + 1.6 + 1 = 727$$

$$6! + 2.6 + 1 = 733$$

$$6! + 3.6 + 1 = 739$$

$$6! + 4.6 - 1 = 743$$

$$6! + 5.6 + 1 = 751$$

$$6! + 6.6 + 1 = 757.$$

Với mỗi số chẵn $n = q - 1$ (q là bất cứ số nguyên tố nào),

công thức :

$$a_k = n! + \begin{cases} kn + 1, \text{ khi } kn + 1 \text{ là số nguyên tố} \\ kn - 1, \text{ khi } kn - 1 \text{ là số nguyên tố} \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Cho tập các số nguyên tố. Tập này gồm $m = n$ số nguyên tố liên tiếp nếu không đồng thời $kn \pm 1$ là hợp số. Nếu đồng thời $kn \pm 1$ là hợp số thì $m < n$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. *Giải một phương trình* là tìm tập nghiệm của nó. Nếu tập nghiệm này là một tập rỗng thì ta nói phương trình đã cho vô nghiệm.

Phương trình $x + \sqrt{9 - x} = 7$ gọi là *phương trình một ẩn* (x là ẩn).

Phương trình $3x - 10y = 12$ gọi là *phương trình hai ẩn* (x và y là ẩn).

2. Cho hai phương trình : $f_1(x) = g_1(x)$ (1) và $f_2(x) = g_2(x)$ (2).

Nếu các tập nghiệm của hai phương trình đó bằng nhau thì ta nói rằng phương trình (1) *tương đương* với phương trình (2) và kí hiệu (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Nếu tập nghiệm của phương trình (2) chứa tập nghiệm của phương trình (1) thì ta nói phương trình (2) là *hệ quả* của phương trình (1) và kí hiệu (1) $\Rightarrow$ (2).

Để giải một phương trình, thông thường ta cần biến đổi nó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là *các phép biến đổi tương đương*.

Đối với phương trình có chứa những chữ ngoài các ẩn thì các chữ này được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*. Lúc đó phương trình được gọi là phương trình chứa tham số. Để tìm tập nghiệm của nó ta phải giải và biện luận phương trình.

3. *Phương trình bậc nhất một ẩn có dạng $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$.*

Phương trình bậc nhất *hai ẩn* có dạng $ax + by = c$ (a, b không đồng thời bằng 0). Với $b \neq 0$ phương trình được biến đổi thành $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Với $b = 0$ thì phương trình trở thành $x = \frac{c}{a}$.

Với phương trình dạng $ax + b = 0$ thì :

+ nếu $a \neq 0$, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

+ nếu $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

+ nếu $a = b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi x.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Các phương trình sau có tương đương không ?

a) $\sqrt{y^2 + 3} = y + 3$ và $\sqrt{x^2 + 3} = (y + 3)^2$

b) $\sqrt{(t - 7)(5 + t)} = 8$ và $\sqrt{t - 7}.\sqrt{5 + t} = 6$.

2. Giải phương trình và biện luận :

a) $\dfrac{x - mn}{m + n} + \dfrac{x - mp}{m + p} + \dfrac{x - np}{n + p} = m + n + p$

b) $\dfrac{y - m}{np} + \dfrac{y - n}{mp} + \dfrac{y - p}{mn} = 2\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\right).$

3. Giải phương trình :

a) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} = 1$ b) $\sqrt{y + 1} - \sqrt{y - 1} = 1.$

4. Giải phương trình : $\sqrt[3]{a + \sqrt{t}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{t}} = \sqrt[3]{b}.$

5. Giải phương trình : $\dfrac{\sqrt{m} + \sqrt{y - p}}{\sqrt{p} + \sqrt{y - m}} = \sqrt{\dfrac{m}{p}}.$

6. Giải phương trình :

a) $\sqrt{x - 5} = \dfrac{x - 14}{3\sqrt{x - 5}} + 3$ b) $\sqrt{y - \sqrt{1 - y}} = 2 - \sqrt{y}.$

7. Giải phương trình : $\dfrac{1 - 2x}{3 - |x - 1|} = 1.$

8. Giải thích tại sao phương trình sau chỉ có một nghiệm, đó là nghiệm nào ?

$$\sqrt{y} + \sqrt{y + 1} = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

9. Giải phương trình : $|3x - 8| - |3x - 2| = 6.$

10. Giải phương trình : $\dfrac{m - t}{m - p} - \dfrac{t - p}{m + p} = \dfrac{2mp}{m^2 - p^2}.$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Bình phương hai vế của phương trình thứ nhất được :

$$y^2 + 1 = y^2 + 2y + 1, \text{ từ đó } y = 0.$$

Phương trình thứ hai cũng chỉ có một nghiệm là $y = 0$. Do đó hai phương trình này tương đương.

b) Phương trình thứ nhất có hai nghiệm là $t = 6$ và $t = -7$.

Phương trình thứ hai chỉ có một nghiệm là $t = 6$. Do đó $t = -7$ không phải là nghiệm của phương trình thứ hai, vậy hai phương trình đã cho không tương đương.

- ***Lời bình :*** *Các cặp phương trình sau có tương đương không, vì sao ?*

a) $|t| = t$ *và* $2015t = 2015t$

b) $2y - 7 = 5 - 4y$ *và* $(2y - 7)^2 = (5 - 4y)^2.$

Giải :

a) Không, vì phương trình thứ nhất chỉ nghiệm đúng với $t \geq 0$ còn phương trình thứ hai lại nghiệm đúng với mọi t.

b) Không, vì phương trình thứ hai lại có thêm một nghiệm nữa thỏa mãn phương trình $2y - 7 = -(5 - 4y)$ là $y = -1$. Với hai phương trình $A = B$ và $A^2 = B^2$ thì phương trình $A^2 = B^2$ là hệ quả của phương trình $A = B$ vì phương trình $A^2 = B^2$ thỏa mãn với $A = B$ và $A = -B$.

2. a) Phương trình đã cho có thể viết :

$$\left(\frac{x - mn}{m + n} - p\right) + \left(\frac{x - mp}{m + p} - n\right) + \left(\frac{x - np}{n + p} - m\right) = 0. \text{ Từ đó :}$$

$$\frac{x - mn - mp - np}{m + n} + \frac{x - mp - mn - np}{m + p} + \frac{x - np - mn - mp}{n + p} = 0,$$

hay $$(x - mn - mp - np)\left(\frac{1}{m + n} + \frac{1}{m + p} + \frac{1}{n + p}\right) = 0.$$

Nếu $\frac{1}{m + n} + \frac{1}{m + p} + \frac{1}{n + p} \neq 0$ thì $x = mn + mp + np$.

Còn nếu $\frac{1}{m + n} + \frac{1}{m + p} + \frac{1}{n + p} = 0$ thì phương trình trở thành hằng đẳng thức với mọi x.

b) Phương trình đã cho có thể viết :

$$\left(\frac{y - m}{np} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{y - n}{mp} - \frac{1}{m} - \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{y - p}{mn} - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) = 0,$$

hay $$\frac{y - m - n - p}{np} + \frac{y - n - m - p}{mp} + \frac{y - p - m - n}{mn} = 0$$

Từ đó : $$(y - m - n - p)\left(\frac{1}{np} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{mn}\right) = 0$$

Vậy $y = m + n + p$.

Lưu ý rằng một trong các số m, n, p cũng như $\frac{1}{np} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{mn}$ phải khác 0.

- ***Lời bình : Tương tự, hãy giải phương trình :***

$$\frac{m + n - t}{p} + \frac{m + p - t}{n} + \frac{n + p - t}{m} + \frac{4t}{m + n + p} = 1.$$

Giải : Ta cộng thêm 3 vào hai vế của phương trình và viết như sau :

$$\left(\frac{m+n-t}{p}+1\right)+\left(\frac{m+p-t}{n}+1\right)+\left(\frac{n+p-t}{m}+1\right)=4-\frac{4t}{m+n+p}.$$

Từ đó : $(m+n+p-t)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)=4.\frac{m+n+p-t}{m+n+p}$,

hay $(m+n+p-t)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}-\frac{4}{m+n+p}\right)=0.$

Vậy $t=m+n+p$.

3. a) Bình phương hai vế được : $x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}=1$,

hay $2\sqrt{x^2-1}=1-2x$; $4x^2-4=1+4x^2-4x$.

Từ đó : $x=\frac{5}{4}$.

Do phải bình phương hai vế nên nói chung ta sẽ được một phương trình không tương đương với phương trình đã cho, do đó ta phải thử lại nghiệm. Thay giá trị $x=\frac{5}{4}$ vào phương trình đã cho ta thấy rằng $\frac{5}{4}$ không phải là nghiệm của nó.

b) Biến đổi tương tự như ở trên ta tìm được ngay $y=\frac{5}{4}$ và lần này $\frac{5}{4}$ lại chính là nghiệm của phương trình đã cho.

- ***Lời bình :*** *Nếu là phương trình sau thì cách giải cũng tương tự :*

$$\sqrt{1-\sqrt{z^4-z^2}}=z-1.$$

Giải : Bình phương hai vế được : $-\sqrt{z^4-z^2}=z^2-2z$.

Từ đó : $z^4-z^2-z^2(z-2)^2=0$

hay $z^2(z^2-1-z^2-4+4z)=z^2(4z-5)=0$.

Vậy phương trình cuối này có hai nghiệm là $z=0$ và $z=\frac{5}{4}$. Sau khi thử lại chỉ có nghiệm $\frac{5}{4}$ là thỏa mãn, tức là phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất là $z=\frac{5}{4}$.

4. Lập phương trình hai vế của phương trình và dựa vào công thức

$(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$ được :

$$a+\sqrt{t}+a-\sqrt{t}+3\sqrt[3]{a^2-t}\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{t}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{t}}\right)=b.$$

Nhưng vì $\sqrt[3]{a+\sqrt{t}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{t}} = \sqrt[3]{b}$, nên : $2a + 3\sqrt[3]{a^2 - t}.\sqrt[3]{b} = b$.

Từ đó $t = a^2 - \dfrac{(b-2a)^3}{27b}$ với điều kiện $a^2 - \dfrac{(b-2a)^3}{27b} \geq 0$ (vì hai phương trình $A = B$ và $A^3 - B^3$ là tương đương, do $A^3 - B^3$ có thể viết $A^3 - B^3 = 0$, hay $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = 0$ mà $A^2 + AB + B^2 = \left(A + \dfrac{B}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}B^2$ không thể bằng 0).

- ***Lời bình :*** *Nếu là phương trình* $\sqrt[3]{(t+1)^2} + 2\sqrt[3]{(t-1)^2} = 3\sqrt[3]{t^2 - 1}$ *thì cách giải như sau :*

Giải : Đặt $u = \sqrt[3]{t+1}$, $v = \sqrt[3]{t-1}$ phương trình đã cho có dạng :

$$u^2 + 2v^2 - 3uv = 0 \qquad (*)$$

Số $t = 1$ không phải là nghiệm của phương trình nên nếu $t \neq 1$ thì $v \neq 0$.

Chia hai vế của (*) cho v^2 và đặt $z = \dfrac{u}{v}$ ta được phương trình :

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \qquad \text{hay} \qquad (z-1)(z-2) = 0$$

mà nghiệm là $z_1 = 1$, $z_2 = 2$. Do đó phương trình đã cho với $t \neq 1$ tương đương với hệ :

$$\frac{t+1}{t-1} = 1 \qquad \text{và} \qquad \frac{t+1}{t-1} = 8.$$

Phương trình thứ nhất vô nghiệm, phương trình thứ hai có nghiệm duy nhất $t = \dfrac{9}{7}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $t = \dfrac{9}{7}$.

5. Phương trình đã cho có thể viết : $(\sqrt{m} + \sqrt{y-p}).\sqrt{p} = \sqrt{m}(\sqrt{p} + \sqrt{y-m})$,

hay $\sqrt{p(y-p)} = \sqrt{m(y-m)}$; $\quad p(y-p) = m(y-m)$.

Vậy $y = m + p$.

Thử lại thấy giá trị này của y là nghiệm của phương trình đã cho.

- ***Lời bình :*** *Tương tự, hãy giải phương trình :*

$$\frac{\sqrt{m+z} + \sqrt{m-z}}{\sqrt{m+z} - \sqrt{m-z}} = \sqrt{p} \qquad (\textit{với } m > 0 \textit{ và } p > 0).$$

Giải : Nhân tử và mẫu với $\sqrt{m+z} + \sqrt{m-z}$ để khử mẫu ta được :

$$\sqrt{m+z} + \sqrt{m-z} = 2z\sqrt{p}$$

Từ đó : $\sqrt{m^2 - z^2} = z\sqrt{p} - m$

Bình phương hai vế ta tìm được hai nghiệm là $z = 0$ và $z = \dfrac{2m\sqrt{p}}{1 + p}$.

Nhưng giá trị 0 không phải là nghiệm, còn giá trị thứ hai là nghiệm với điều kiện $p \geq 1$.

(Thật thế ta có $\sqrt{m + z} = \sqrt{m + \dfrac{2m\sqrt{p}}{1 + p}} = \sqrt{m}.\sqrt{\dfrac{(1 + \sqrt{p})^2}{1 + p}} = \sqrt{m}.\dfrac{1 + \sqrt{p}}{\sqrt{1 + p}}$;

tương tự $\sqrt{m - z} = \sqrt{m}.\dfrac{\sqrt{p} - 1}{\sqrt{1 + p}}$ nếu $\sqrt{p} - 1 \geq 0$).

6. a) Điều kiện : $x - 5 \geq 0$ và $3\sqrt{x - 5} \neq 0$ hay $x > 5$.

Phương trình đã cho có thể viết :

$$\sqrt{x - 5} - \frac{(x - 14)(3 + \sqrt{x - 5})}{9 - (\sqrt{x - 5})^2} = 3$$

hay $$\sqrt{x - 5} - \frac{(x - 14)(3 + \sqrt{x - 5})}{9 - x + 5} = 3;$$

$$\sqrt{x - 5} + 3 + \sqrt{x - 5} = 3 \quad \text{hay} \quad \sqrt{x - 5} = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm tùy ý $x \geq 5$.

b) Điều kiện : $y \geq 0$, $2 - \sqrt{y} \geq 0$ và $y - \sqrt{1 - y} \geq 0$,

hay $0 < y \leq 1$ và $y - \sqrt{1 - y} \geq 0$.

Vì $y \leq 1$ nên $2 - \sqrt{y} > 0$, ta có thể bình phương hai vế của phương trình, được :

$$y - \sqrt{1 - y} = 4 - 4\sqrt{y} + y \quad \text{hay} \quad \sqrt{1 - y} = 4(\sqrt{y} - 1) \qquad (*)$$

Vì $y \leq 1$ nên $\sqrt{y} \leq 1$, vế phải của (*) ≤ 0, còn vế trái $\sqrt{1 - y} \geq 0$, do đó (*) xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{1 - y} = 0 = 4(y - 1)$, tức là khi $y = 1$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện trên.

Vậy phương trình có một nghiệm là $y = 1$.

- ***Lời bình :*** *Hãy giải và biện luận phương trình* $\sqrt{t^2 - t} = a - t$.

Giải : Điều kiện : $t^2 - t \geq 0$ hay $t \leq 0$ hoặc $t \geq 1$.

Do vế trái không âm nên $a - t \geq 0$ hay $t \leq a$. Bình phương hai vế được :

$$t^2 - t = a^2 - 2at + t^2 \quad \text{hay} \quad (2a - 1)t = a^2$$

Nếu $a = \frac{1}{2}$ thì $0 = \frac{1}{4}$ vô lí ! **Phương trình vô nghiệm.**

Nếu $a \neq \frac{1}{2}$ thì $t = \frac{a^2}{2a - 1}$.

7. Phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau :

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \dfrac{1 - 2x}{3 - (x - 1)} = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - 1 < 0 \\ \dfrac{1 - 2x}{3 + (x - 1)} = 1. \end{cases}$$

Giải phương trình $\frac{1 - 2x}{4 - x}$ được $x_1 = -3$ là nghiệm duy nhất, nhưng x_1 không thỏa mãn điều kiện $x - 1 \geq 0$, do đó hệ này vô nghiệm.

Giải phương trình $\frac{1 - 2x}{2 + x} = 1$ được $x_2 = -\frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất và x_2 thỏa mãn điều kiện $x - 1 < 0$, do đó $-\frac{1}{3}$ là nghiệm của hệ thứ hai.

Như vậy nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là $x = -\frac{1}{3}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *hãy giải phương trình :* $\left|y - |4 - y|\right| - 2y = 4$.

Giải : Phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau :

$$\begin{cases} 4 - y \geq 0 \\ \left|y - (4 - y)\right| - 2y = 4 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} 4 - y < 0 \\ \left|y + (4 - y)\right| - 2y = 4 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} y \leq 4 \\ |2y - 4| - 2y = 4 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y > 4 \\ -2y = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Hệ thứ hai vô nghiệm. Hệ thứ nhất tương đương với hai hệ sau :

$$\begin{cases} y \leq 4 \\ 2y - 4 \geq 0 \\ (2y - 4) - 2y = 4 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y \leq 4 \\ y < 2 \\ -4y = 0 \end{cases}$$

mà nghiệm duy nhất là 0 và đó cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

8. Phương trình đã cho có thể viết : $y + \sqrt{y(y + 1)} = 1$ với $y > 0$.

Từ đó : $\sqrt{y(y + 1)} = 1 - y$. Bình phương hai vế được :

$$y(y + 1) = (1 - y)^2 \quad \text{hay} \quad y^2 + y = 1 - 2y + y^2$$

Vậy $3y = 1$ và $y = \frac{1}{3}$. Đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

- ***Lời bình :*** *Cũng hỏi như trên nhưng phương trình bây giờ là :*

$$\frac{1}{1+z}+\frac{2}{1+\sqrt{z}}=\frac{2+\sqrt{z}}{2z}.$$

Giải : Đặt $\sqrt{z}=t$ nên $z=t^2$. Phương trình có dạng :

$$\frac{1}{1+t^2}+\frac{2}{1+t}=\frac{2+t}{2t^2}.$$

$MC=(1+t^2)(1+t)2t^2$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$(1+t)2t^2+2.2t^2(1+t^2)=(2+t)(1+t^2)(1+t)$$

hay $\quad 2t^2+2t^3+4t^2+4t^4=(2+2t^2+t+t^3)(1+t)$.

Sau khi rút gọn được : $3t^4-t^3+3t^2-3t-2=0$

Biểu thức này có thể viết : $(t-1)(2t^3+2t^2+5t+2)=0$

Thừa số $2t^3+2t^2+5t+2\neq 0$ nên phương trình chỉ có một nghiệm là $t=1$. Vậy phương trình đã cho chỉ có một nghiệm là $z=1$.

9. Dùng phương pháp chia khoảng ta xét ba khoảng sau :

$$x\le\frac{2}{3},\quad \frac{2}{3}<x\le\frac{8}{3},\quad x>\frac{8}{3}.$$

Ta được phương trình đã cho tương đương với ba hệ sau :

$$\begin{cases}x\le\dfrac{2}{3}\\-(3x-8)+(3x-2)=6;\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{2}{3}<x\le\dfrac{8}{3}\\-(3x-8)-(3x-2)=6;\end{cases}$$

và $\begin{cases}x>\dfrac{8}{3}\\(3x-8)-(3x-2)=6\end{cases}$

tức là ba hệ : $\begin{cases}x\le\dfrac{2}{3};\\6=6\end{cases}\quad\begin{cases}\dfrac{2}{3}<x\le\dfrac{8}{3}\\-6x=-4\end{cases}$ và $\begin{cases}x>\dfrac{8}{3}\\-6=6\end{cases}$

Hệ thứ nhất này có nghiệm là các số trong khoảng $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

Hệ thứ hai và thứ ba vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

- ***Lời bình :*** *Ta biết rằng đẳng thức $|a+b|=|a|+|b|$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi $ab\ge 0$, tức là :*

$$|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab > 0.$$

Dựa trên nhận xét này, hãy giải phương trình : $\left|\dfrac{y}{y-1}\right| + |y| = \dfrac{y^2}{|y-1|}$.

Giải : Do biểu thức $\dfrac{y^2}{y-1}$ có thể viết :

$$\frac{y^2}{y-1} = \frac{y + y^2 - y}{y-1} = \frac{y + y(y-1)}{y-1} = \frac{y}{y-1} + y$$

hay $$\frac{y^2}{|y-1|} = \frac{|y^2|}{|y-1|} = \left|\frac{y^2}{y-1}\right|$$

Do đó phương trình đã cho có dạng sau : $\left|\dfrac{y}{y-1}\right| + |y| = \left|\dfrac{y}{y-1} + y\right|$

Dựa vào nhận xét trên ta được bất phương trình tương đương :

$$\frac{y}{y-1}.y \geq 0, \quad \text{tức là } \frac{y^2}{y-1} \geq 0.$$

Vậy nghiệm của nó tức cũng là nghiệm của phương trình đã cho là số 0 và tất cả số thuộc khoảng $(1; +\infty)$.

10. Điều kiện : $m \neq \pm p$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu ta có :

$$(m + p)(m - t) - (m - p)(t - p) = 2mp$$

hay $$-(m + p)t - (m - p)t = 2mp - m(m + p) - p(m - p);$$

$$-2mt = 2mp - m^2 - mp - mp + p^2$$

hay $$-2mt = p^2 - m^2,$$

tức là ta được phương trình tương đương với phương trình đã cho là

$$2mt = m^2 - p^2.$$

Nếu $m = 0$ thì phương trình vô nghiệm, do $m^2 - p^2 = -p^2 \neq 0$ vì $p \neq 0$.

Nếu $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm là $t = \dfrac{m^2 - p^2}{2m}$.

- ***Lời bình :*** *Nếu là phương trình :*

$$\frac{6t + 2m + 3n + p}{6t + 2m - 3n - p} = \frac{2t + 6m + n + 3p}{2t + 6m - n - 3p}$$

thì cách giải như sau.

Giải : Nhìn vào phương trình ta thấy có những số hạng giống nhau ở tử và mẫu của mỗi vế nên để cho dễ giải ta đặt như sau :

$$6t + 2m = M, \quad 3n + p = N, \quad 2t + 6m = P, \quad n + 3p = Q$$

để đưa phương trình về dạng $\frac{M+N}{M-N} = \frac{P+Q}{P-Q}$.

Ta hãy biến đổi phương trình dạng này :

cộng 1 vào hai vế được : $\frac{2M}{M-N} = \frac{2P}{P-Q}$,

trừ hai vế đi 1 được : $\frac{2N}{M-N} = \frac{2Q}{P-Q}$.

Chia hai vế của hai đẳng thức này cho nhau ta có : $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$.

Như vậy phương trình đã cho có dạng gọn sau đây :

$$\frac{6t + 2m}{3n + p} = \frac{2t + 6m}{n + 3p}.$$

Từ đó : $\left(\frac{6}{3n+p} - \frac{2}{n+3p}\right)t = \left(\frac{6}{n+3p} - \frac{2}{3n+p}\right)m$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $t = \frac{mn}{p}$.

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Tính chất của bình phương các số bắt đầu từ 4, 5 hoặc 9

a) Ta biết rằng : bình phương của các số từ 51 đến 59 có hai chữ số cuối cùng ngày càng tăng, của các số từ 41 đến 49 hoặc từ 91 đến 99 lại là dãy số giảm của bình phương các số từ 1 đến 9.

Bây giờ ta chứng tỏ rằng bình phương của các số có ba chữ số từ 501 đến 531 có chữ số tận cùng tăng, còn của các số từ 469 đến 499 và từ 969 đến 999 lại có chữ số tận cùng giảm.

$501^2 = 251.10^2 + 1^2$ $\qquad$ $969^2 = 938.10^2 + 31^2$

$502^2 = 252.10^2 + 2^2$ $\qquad$ $970^2 = 940.10^2 + 30^2$

....

$531^2 = 281.10^2 + 31^2$ $\qquad$ $999^2 = 998.10^2 + 1^2$.

Tương tự với số có bốn chữ số :

$5001^2 = 2501.10^4 + 1^2$ $\qquad$ $9901^2 = 9802.10^4 + 99^2$

$5002^2 = 2502.10^4 + 2^2$ $\qquad$ $9902^2 = 9804.10^4 + 98^2$

....

$5099^2 = 2599.10^4 + 99^2$ $\qquad$ $9999^2 = 9998.10^4 + 1^2$.

b) **Những kết quả nói trên dựa vào ba hằng đẳng thức sau đây (với $a \in \mathbb{N}$, $1 \le a < 10^n$) :**

1. $(4.10^n + a)^2 = (15.10^{n-1} + a).10^{n+1} + (10^n - a)^2$;

2. $(5.10^n + a)^2 = (25.10^{n-1} + a).10^{n+1} + a^2$;

3. $(9.10^n + a)^2 = (80.10^{n-1} + a).10^{n+1} + (10^n - a)^2$.

Do đó ta thấy rằng : bình phương của số có $(n + 1)$ chữ số, bắt đầu bằng 5, thì tận cùng bằng bình phương của số có $(n + 1)$ chữ số với giá trị của a là $1 \le a < \sqrt{10^{n+1}}$; bình phương của số bắt đầu bằng 4 hoặc 9 với giá trị của a là $1 \le a < 10^n$ mà $10^n - a < \sqrt{10^{n+1}}$, tức là :

$$10^n - \sqrt{10^{n+1}} < a < 10^n.$$

Đặc biệt, với $n = 2$ ta có tương ứng với $1 \le a \le 31$ và $69 \le a \le 99$ và với $n = 3$ thì tương ứng với $1 \le a \le 99$ và $901 \le a \le 999$.

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } a'^2 + b'^2 \neq 0)$$

a) Ngoài hai phương pháp cộng và thế đã học ở lớp 9, ta áp dụng *quy tắc Crame* như sau :

Lập biểu thức $D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

gọi là *định thức* của hệ phương trình.

Tương tự kí hiệu :

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b; \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c.$$

Nếu $D \neq 0$, hệ có một nghiệm duy nhất $x = \dfrac{D_x}{D}$, $y = \dfrac{D_y}{D}$.

Nếu $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, hệ vô nghiệm.

Nếu $D = D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm tính theo công thức :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-by + c}{a} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ (nếu } a \neq 0\text{)}, \qquad \text{hoặc} \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{-ax + c}{b} \end{cases} \text{ (nếu } b \neq 0\text{)}.$$

b) Tập nghiệm được biểu diễn hình học như sau :

Nếu $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$ thì hai đường thẳng (d) và (d') cắt nhau : hệ có một nghiệm duy nhất.

Nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ thì hai đường thẳng (d) // (d') : hệ vô nghiệm.

Nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ thì (d) trùng với (d') : hệ có vô số nghiệm.

c) Khi giải và biện luận *hệ phương trình có chứa tham số*, có thể xảy ra trường hợp $a = b = 0$ (hoặc $a' = b' = 0$). Khi đó thì :

- Phương trình $0x + 0y = c$ vô nghiệm nếu $c \neq 0$, nghiệm đúng với mọi x và với mọi y nếu $c = 0$.

- Trong một hệ phương trình, nếu một **phương trình của hệ vô nghiệm** thì hệ vô nghiệm.
- Trong một hệ hai phương trình, nếu một **phương trình của hệ nghiệm** đúng với mọi giá trị của các ẩn thì tập **nghiệm của hệ phương trình** đó trùng với tập nghiệm của phương trình còn lại.

2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Cách giải là dùng *phương pháp khử dần ẩn* (**phương pháp Gau-xơ**).

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Tìm tất cả giá trị của p để các hệ :

a) $\begin{cases} 3x + 7y = 20 \\ px + 14y = 15 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} px - 8y = 12 \\ 2x - 6y = 15 \end{cases}$ vô nghiệm.

2. Tìm các giá trị của m để cả hai nghiệm **của hệ sau đây đều dương** :

$$\begin{cases} u - 2v = m \\ 3u + v = 8. \end{cases}$$

3. Giải và biện luận hệ : $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1. \end{cases}$

4. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} z - |t| = 1 \\ z - 2t = -1. \end{cases}$

5. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{2u + v} + \dfrac{4}{2u - 3v} = 5 \\ \dfrac{15}{2u + v} + \dfrac{2}{2u - 3v} = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} p^2 - 2pq + q^2 = 0 \\ p^2 - 2p + 1 = 0. \end{cases}$

6. Giải hệ ba ẩn sau : $\begin{cases} x + y + z = m \\ x + y + t = n \\ x + z + t = p \\ y + z + t = q. \end{cases}$

7. Giải hệ : $$\begin{cases} y + z - x = \dfrac{xyz}{m^2} \\ z + x - y = \dfrac{xyz}{n^2} \\ x + y - z = \dfrac{xyz}{q^2}. \end{cases}$$

8. Cho ba số a, b, c không bằng nhau. Chứng minh rằng từ các đẳng thức

$$x + ay + a^2z = 0, \quad x + by + b^2z = 0 \quad \text{và} \quad x + cy + c^2z = 0$$

ta suy ra được $x = y = z = 0$.

9. Giải hệ : $$\begin{cases} z + my + m^2x + m^3 = 0 \\ z + ny + n^2x + n^3 = 0 \\ z + py + p^2x + p^3 = 0. \end{cases}$$

10. Cho hệ : $$\begin{cases} x - 8y - 4z = 9m - 8 \\ y - 8x - 4z = 9n - 8 \\ 7z - 4y - 4x = 9p - 4. \end{cases}$$

a) Giải hệ.

b) Tính các giá trị $x - m$, $y = n$, $2(z - p)$. Thử lại rằng ba giá trị này bằng nhau : $x - m = y - n = 2(z - p) = A$.

Cuối cùng chứng minh : $x^2 + y^2 + z^2 - (m^2 + n^2 + p^2) = 2A$.

11. Giải hệ : $$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 = 150 & (1) \\ t_2 + t_5 = 43 & (2) \\ t_3 + t_6 = 52 & (3) \\ t_4 + t_7 = 53 & (4) \\ t_1.t_5 = 22 & (5) \\ t_2.t_3 = 480 & (6) \\ t_3.t_4 = 135 & (7) \end{cases}$$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Hệ có nghiệm duy nhất nếu định thức $D \neq 0$ tức là :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ p & 14 \end{vmatrix} = 42 - 7p \neq 0, \text{ vậy } p \neq 6.$$

b) Hệ vô nghiệm nếu định thức $D = 0$ vì $D_x = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ 15 & -6 \end{vmatrix} \neq 0$

Ta có : $$D = \begin{vmatrix} p & -8 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6p + 16 = 0, \text{ vậy } p = \frac{8}{3}.$$

- ***Lời bình :*** *Tương tự, tìm các giá trị của m và p để hệ* $\begin{cases} z = 7 - t \\ mz - 2t = p \end{cases}$ *có một nghiệm, có vô số nghiệm, vô nghiệm.*

Giải : Từ phương trình thứ hai ta có $z = \dfrac{p + 2t}{m}$ $(m \neq 0)$. Kết hợp với phương trình thứ nhất được phương trình ẩn t sau :

$$\frac{p + 2t}{m} = 7 - t \quad \text{hay} \quad p + 2t = 7m - mt \Leftrightarrow (2 + m)t = 7m - p.$$

Nếu $m \neq -2$, hệ có một nghiệm $t = \dfrac{7m - p}{2 + m}$.

Nếu $m = -2$, ta có $0t = -14 - p$ nên nếu thêm $p = -14$ hệ có dạng $0t = 0$ và có vô số nghiệm.

Nếu $m = -2$ và $p \neq -14$, hệ vô nghiệm.

2. Ta có thể viết hệ đã cho như sau : $\begin{cases} 3u - 6v = 3m \\ 3u + v = 8 \end{cases}$

Từ đó : $7v = 8 - 3m$ hay $v = \dfrac{8 - 3m}{7}$

và $u = m + 2v = m + \dfrac{16 - 6m}{7}$ hay $u = \dfrac{m + 16}{7}$.

Nếu cả hai nghiệm u và v đều dương thì ta phải có :

$$m + 16 > 0 \quad \text{và} \quad 8 - 3m > 0$$

Vậy điều kiện là $-16 < m < \dfrac{8}{3}$.

- ***Lời bình :*** ***Nếu bài ra là : tìm giá trị nguyên của a để hệ***

  $\begin{cases} ax - y = 5 \\ 2x + 3ay = 7 \end{cases}$ *có nghiệm $x > 0$, $y < 0$.*

  thì cách giải như sau :

  Giải : Phương trình thứ nhất cho $y = ax - 5$. Thay giá trị của x vào phương trình thứ hai được :

  $$2x + 3a(ax - 5) = 7 \quad \text{hay} \quad 2x + 3a^2x - 15a = 7$$

  Từ đó : $(2 + 3a^2)x = 7 + 15a$

  Vậy $x = \dfrac{7 + 15a}{2 + 3a^2}$, $y = ax - 5 = \dfrac{7a - 10}{2 + 3a^2}$

  Do $2 + 3a^2 > 0$ nên muốn $x > 0$, $y < 0$ thì a phải thỏa mãn các bất đẳng thức $7 + 15a > 0$ và $7a - 10 < 0$, tức là $-\dfrac{7}{15} < a < \dfrac{10}{7}$.

3. Trước tiên ta tìm $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1;$

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 1; \quad D_y = \begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - a^2.$$

Nếu $a \neq 1$, $a \neq -1$ thì $D \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a^3 - 1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + a + 1}{a + 1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{a - a^2}{a^2 - 1} = -\frac{a}{a + 1}.$$

Nếu $a = 1$ thì $D = D_x = D_y$. Hệ có dạng $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ mà nghiệm là $x = p$, $y = 1 - p$ (p là bất cứ số thực nào).

Nếu $a = -1$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$, hệ đã cho vô nghiệm.

- ***Lời bình :** Giải và biện luận theo m hệ :* $\begin{cases} mx + m^2 y = 1 \\ x + (m - 1)y = m. \end{cases}$

Giải : Nếu $m = 0$, hệ có dạng $\begin{cases} 0x + 0y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Hệ này vô nghiệm.

Nếu $m \neq 0$ ta nhân phương trình thứ hai với $-m$ được hệ :

$$\begin{cases} mx + m^2y = 1 \\ -mx - m(m - 1)y = -m^2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} mx + m^2y = 1 \\ my = 1 - m^2 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai ta có $y = \dfrac{1 - m^2}{m}$. Thay giá trị này của y vào phương trình thứ nhất được : $x = \dfrac{1 - m^2y}{m} = \dfrac{1 - m + m^2}{m}$.

Như thế với $m = 0$, hệ đã cho vô nghiệm, với $m \neq 0$ hệ có nghiệm

$$x = \frac{1 - m + m^2}{m}, \quad y = \frac{1 - m^2}{m}.$$

4. a) Giả sử $y \geq 0$, thế thì $|y| = y$ và hệ có dạng $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

Rút $y = 3x - 3$ từ phương trình thứ hai và thay giá trị của y vào phương trình thứ nhất giải sẽ được $x = 2$, từ đó $y = 3$.

Nếu $y < 0$ thì $|y| = -y$ và hệ có dạng $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

Giải ra được $x = -\dfrac{4}{7}$ và $y = -\dfrac{33}{7}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x_1 = 2; y_1 = 3$ và $x_2 = -\frac{4}{7}; y_2 = -\frac{33}{7}$.

b) Nếu $t \geq 0$ thì $|t| = t$, ta có hệ $\begin{cases} z - t = 1 \\ z - 2t = -1 \end{cases}$

Giải ra được : $t = 2, z = 3$.

Nếu $t < 0$ thì $|t| = -t$, ta có hệ $\begin{cases} z + t = 1 \\ z - 2t = -1 \end{cases}$

Giải ra được $t = \frac{2}{3}; z = \frac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $t_1 = 2; z_1 = 3$ và $t_2 = \frac{2}{3}; z_2 = \frac{1}{3}$.

- ***Lời bình :*** *Có thể giải thêm hai hệ sau :*

c) $\begin{cases} |u + 1| + |v - 1| = 5 \\ |u + 1| = 4v - 4 \end{cases}$ *và* *d)* $\begin{cases} |u + v| = 1 \\ |u| + |v| = 1. \end{cases}$

Giải :

c) Từ phương trình thứ hai ta có $v - 1 = \frac{1}{4}|u + 1| \geq 0$.

Vì $|v - 1| = v - 1$ nên hệ đã cho có thể viết $\begin{cases} |u + 1| + v - 1 = 5 \\ |u + 1| = 4v - 4 \end{cases}$

Khử $|u + 1|$ ta được $4v - 4 + v - 1 = 5$, từ đó $v = 2$.

Thay $v = 2$ vào phương trình thứ nhất được $|u + 1| = 4$.

Nếu $u + 1 > 0$ ta có phương trình $u + 1 = 4$ hay $u = 3$.

Nếu $u + 1 < 0$ ta có phương trình $-u - 1 = 4$ hay $u = -5$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $(u_1 = 3; v_1 = 2)$ và $(u_2 = -5; v_2 = 2)$.

d) Nếu $u > 0, v > 0$ thì $|u| = u$, $|v| = v$, $|u + v| = u + v$.

Ta có hệ : $\begin{cases} u + v = 1 \\ u + v = 1 \end{cases}$

Giải ra được $u = t, v = 1 - t$ với $t \in [0; 1]$.

Nếu $u < 0, v < 0$ thì $|u| = -u$, $|v| = -v$, $|u + v| = -u - v = 1$.

Ta có hệ : $\begin{cases} -u - v = 1 \\ -u - v = 1 \end{cases}$

Giải ra được $u = t, v = -1 - t$ với $t \in [-1; 0]$.

5. a) Ta phải giả sử $u \neq \frac{3}{2}v$; $u \neq -\frac{v}{2}$.

Đặt $2u + v = x$, $2u - 3v = y$, hệ đã cho có dạng $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 5 \\ \frac{15}{x} + \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$

Giải ra được $x = 5$, $y = 1$.

Như vậy ta phải giải tiếp hệ sau đây : $\begin{cases} 2u + v = 5 \\ 2u - 3v = 1 \end{cases}$

Giải ra được $u = 2$, $v = 1$.

b) Cộng từng vế hai phương trình đã cho được :

$$p^2 - 2pq + q^2 + p^2 - 2p + 1 = 0 \quad \text{hay} \quad (p - 1)^2 + (p - q)^2 = 0$$

Do $(p - 1)^2 \geq 0$ và $(p - q)^2 \geq 0$ $\forall p, q$ nên tổng $(p - 1)^2 + (p - q)^2 \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi $p = q = 1$. Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $p = q = 1$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Cho hệ phương trình $\begin{cases} az + at = -3 \\ (1 - a)z + t = 0 \end{cases}$

a) Giải hệ với a = 2.

b) Tìm a để hệ có cả hai nghiệm đều âm.

Giải :

a) Với $a = 2$, ta có hệ $\begin{cases} 2z + 2t = -3 \\ -z + t = 0. \end{cases}$ Giải ra được $z = t = -\frac{3}{4}$.

b) Từ phương trình thứ hai của hệ đã cho suy ra $t = (a - 1)z$. Thay vào phương trình thứ nhất rồi biến đổi được $a^2z = -3$ (*)

Với $a \neq 0$ ta có $z = -\frac{3}{a^2}$. Vì $z < 0$ với mọi $a \neq 0$ nên theo (*) muốn có $t < 0$ chỉ cần $a - 1 > 0$ hay $a > 1$.

Vậy giá trị a phải tìm là $a > 1$.

6. Cộng tất cả phương trình đã cho được : $x + y + z + t = \frac{m + n + p + q}{3}$

Vậy $t = (x + y + z + t) - (x + y + z) = \frac{m + n + p + q}{3} - m = \frac{n + p + q - 2m}{3}$

Giải tương tự được :

$$z = \frac{m + p + q - 2n}{3}, \; y = \frac{m + n + q - 2p}{3}, \; x = \frac{m + n + p - 2q}{3}.$$

- ***Lời bình*** *: Tương tự giải hệ sau :*

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=m \\ \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=n \\ \dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=p \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{t}=q. \end{cases}$$

Giải *:* Nếu ta đặt $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$ và $\frac{1}{t}=t'$ thì cách giải hệ này sẽ giống như cách giải hệ ở trên. Do đó dựa vào kết quả giải hệ ở trên ta có nghiệm của hệ đã cho là :

$$x=\frac{3}{m+n+p-2q},\quad y=\frac{3}{m+n+q-2p}$$

$$z=\frac{3}{m+p+q-2n},\quad t=\frac{3}{n+p+q-2m}.$$

7. Rõ ràng ta có nghiệm của hệ là $x=y=z=0$.

Bây giờ ta chia hai vế của mỗi phương trình của hệ cho xyz, được :

$$\frac{2}{xy}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2};\quad \frac{2}{yz}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2};\quad \frac{2}{xz}=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{p^2}$$

Vậy $\quad xy=\dfrac{2m^2n^2}{m^2+n^2};\quad yz=\dfrac{2n^2p^2}{n^2+p^2};\quad xz=\dfrac{2m^2p^2}{m^2+p^2}\qquad (*)$

Nhân từng vế các bất đẳng thức này được :

$$x^2y^2z^2=\frac{8m^4n^4p^4}{(m^2+n^2)(n^2+p^2)(m^2+p^2)}$$

Từ đó $\quad xyz=\pm\dfrac{2\sqrt{2}m^2n^2p^2}{\sqrt{(m^2+n^2)(n^2+p^2)(m^2+p^2)}}.$

Với đẳng thức $xy=\dfrac{2m^2n^2}{m^2+n^2}$ ta tìm được hai giá trị của z chỉ khác nhau về dấu. Rồi từ đẳng thức (*) với giá trị của z ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của y và x.

Như vậy ta được hai hệ giá trị của x, y, z thỏa mãn hệ đã cho.

- ***Lời bình*** *: Giải hệ sau :* $\begin{cases} (p+m)y+(m+n)z-(n+p)x=2m^3 \\ (m+n)z+(n+p)x-(p+m)y=2n^3 \\ (n+p)x+(p+m)y-(m+n)z=2p^3. \end{cases}$

Giải : Cộng ba phương trình đã cho, được :

$$(n + p)x + (p + m)y + (m + n)z = 2m^3 + 2n^3 + 2p^3$$

Từ đó ta tìm được : $2(n + p)x = 2n^3 + 2p^3$

$$2(p + m)y = 2m^3 + 2p^3$$

$$2(m + n)z = 2m^3 + 2n^3.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là :

$$x = n^2 - np + p^2; \qquad y = m^2 - mp + p^2; \qquad z = m^2 - mn + n^2.$$

8. Lấy phương trình thứ nhất lần lượt trừ đi phương trình thứ hai rồi trừ đi phương trình thứ ba được :

$$(a - b)y + (a^2 - b^2)z = 0; \qquad (a - c)y + (a^2 - c^2)z = 0$$

Do $a - b \neq 0$ và $a - c \neq 0$ nên từ đó ta có :

$$y + (a + b)z = 0; \qquad y + (a + c)z = 0$$

Trừ từng vế hai đẳng thức này được : $(b - c)z = 0$

Nhưng do $b - c \neq 0$ nên ta có ngay $z = 0$. Thay $z = 0$ vào một trong hai phương trình cuối được $y = 0$. Cuối cùng tìm được $x = 0$.

Vậy ta đã suy ra $x = y = z = 0$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh rằng nếu khử x, y, z từ các đẳng thức*

$$mx + py + nz = 0, \qquad px + ny + mz = 0 \quad \text{và} \quad nx + my + pz = 0$$

ta suy ra được hệ thức : $m^3 + n^3 - p^3 - 3mnp = 0.$

Giải : Nhân phương trình thứ nhất với n và phương trình thứ hai với p được : $mnx + npy + n^2z = 0$

$$p^2x + npy + mpz = 0$$

Trừ từng vế hai phương trình này để khử y ta có :

$$(mn - mp)x + (n^2 - mp)z = 0$$

hay $(mn - p^2)x = (mp - n^2)z$ tức là : $\dfrac{x}{mp - n^2} = \dfrac{z}{mn - p^2}$

Tương tự ta có : $\dfrac{x}{mp - n^2} = \dfrac{y}{np - m^2}$

Như vậy : $\dfrac{x}{mp - n^2} = \dfrac{y}{np - m^2} = \dfrac{z}{mn - p^2} = k$

Từ đó : $x = k(mp - n^2); \quad y = k(np - m^2); \quad z = k(mn - p^2)$

Thay các giá trị này vào phương trình thứ ba được :

$$n(mp - n^2) + m(np - m^2) + p(mn - p^2) = 0$$

hay $m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp = 0.$

9. Các phương trình đã cho chứng tỏ rằng đa thức $t^3 + xt^2 + yt + z$ bằng 0 với ba giá trị khác nhau của t là $t = m$, $t = n$, $t = p$ (với $m \neq n \neq p$). Ta lập hiệu :

$$t^3 + xt^2 + yt + z - (t - m)(t - n)(t - p)$$

Hiệu này cũng bằng 0 với t bằng m, n, p

$$(x + m + n + p)t^2 + (y - mn - mp - np)t + z + mnp$$

Biểu thức này cũng bằng 0 với ba giá trị khác nhau của t, vì thế tất cả hệ số của nó bằng 0, tức là :

$$x = -(m + n + p), \quad y = mn + mp + np, \quad z = -mnp.$$

- ***Lời bình** : Tương tự, hãy giải hệ :* $\begin{cases} x + y + z + t = a \\ mx + ny + pz + qt = b \\ m^2x + n^2y + p^2z + q^2t = c \\ m^3x + n^3y + p^3z + q^3t = d. \end{cases}$

***Giải** :* Nhân phương trình thứ nhất với s, phương trình thứ hai với u, phương trình thứ ba với v, phương trình thứ tư với 1 rồi cộng chúng lại được :

$$(m^3 + m^2s + ms + u)x + (n^3 + n^2s + ns + u)y +$$
$$+ (p^3 + p^2s + ps + u)z + (q^3 + q^2s + qs + u)t =$$
$$= as + bu + cv + d$$

Ta chọn các giá trị s, u, v sao cho có các đẳng thức :

$$n^3 + n^2s + ns + u = 0$$
$$p^3 + p^2s + ps + u = 0$$
$$q^3 + q^2s + qs + u = 0$$

Từ đó theo bài toán ở trên ta được :

$$v = -(n + p + q), \quad u = np + nq + pq, \quad s = -npq$$

Vậy $x = \dfrac{A}{m^3 + m^2v + mu + s} = \dfrac{A}{(m - n)(m - p)(m - q)}$

trong đó $A = -anpq + b(np + nq + pq) - c(n + p + q) + d$.

10. a) Giải hệ này ta được nghiệm là :

$$x = \frac{m - 8n - 4p + 8}{9}, \; y = \frac{-8m + n - 4p + 8}{9} \text{ và } z = \frac{-4m - 4n + 7p + 4}{9}.$$

b) Ta có : $x - m = y - n = 2(z - p) = -\dfrac{4}{9}(2m + 2n + p - 2)$

Đặt $A = -\dfrac{4}{9}(2m + 2n + p - 2)$. Ta có :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (m^2 + n^2 + p^2) = x^2 - m^2 + y^2 - n^2 + z^2 - p^2$$

$$= (x + m)(x - m) + (y + n)(y - n) + (z + p)(z - p)$$

$$= (x - m)(x - m + 2m) + (y - n)(y - n + 2n) + (z - p)(z - p + 2p)$$

$$= A(A + 2m) + A(A + 2n) + \frac{A}{2}\left(\frac{A}{2} + 2p\right)$$

$$= \frac{9A^2}{4} + (2m + 2n + p)A$$

Nhưng $2m + 2n + p - 2 = -\frac{9A}{4}$, hay $2m + 2n + p = -\frac{9A}{4} + 2$

Vậy biểu thức đã cho bằng : $\frac{9A^2}{4} + \left(-\frac{9A}{4} + 2\right).A = 2A.$

- ***Lời bình** : Xét thêm bài toán sau về giải hệ :*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \dfrac{m^2 x}{m - q} + \dfrac{n^2 y}{n - q} + \dfrac{p^2 z}{p - q} = 0 \\ \dfrac{mx}{m - q} + \dfrac{ny}{n - q} + \dfrac{pz}{p - q} = q(m - n)(n - p)(p - m). \end{cases}$$

Giải : Từ hai phương trình đầu ta tìm được :

$$\frac{x}{\dfrac{n^2}{n - q} - \dfrac{p^2}{p - q}} = \frac{y}{\dfrac{p^2}{p - q} - \dfrac{m^2}{m - q}} = \frac{z}{\dfrac{m^2}{m - q} - \dfrac{n^2}{n - q}} = k$$

Thay vào phương trình thứ ba ta có :

$$\frac{m}{m - q}\left(\frac{n^2}{n - q} - \frac{p^2}{p - q}\right) + \frac{n}{n - q}\left(\frac{p^2}{p - q} - \frac{m^2}{m - q}\right) + \frac{p}{p - q}\left(\frac{m^2}{m - q} - \frac{n^2}{n - q}\right)$$

$$= \frac{q(m - n)(n - p)(m - p)}{(m - q)(n - q)(p - q)}$$

Như thế $k = -(m - q)(n - q)(p - q)$. Vậy hệ đã cho có nghiệm là :

$$x = (m - q)(n - p)(qn + qp - np)$$

$$y = (n - q)(p - m)(qp + qm - mp)$$

$$z = (p - q)(m - n)(qm + qn - mn).$$

11. Cộng từng vế ba phương trình (2), (3), (4) được :

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 148$$

Lấy (1) trừ đi phương trình này ta có ngay $x_1 = 2$.

Từ (5) có $x_5 = 22 : x_1 = 11$. Từ (2) có $x_2 = 43 - x_5 = 32$.

Từ (6) có $x_3 = 480 : x_2 = 15$. Từ (7) có $x_4 = 135 : x_3 = 9$.

Từ (3) có $x_6 = 52 - x_3 = 37$. Cuối cùng từ (4) có $x_7 = 53 - x_4 = 44$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là :

$$x_1 = 2,\ x_2 = 32,\ x_3 = 15,\ x_4 = 9,\ x_5 = 11,\ x_6 = 37 \text{ và } x_7 = 44.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải hệ :*

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = 6 & (1) \\ t_2 + t_3 + t_4 = 9 & (2) \\ t_3 + t_4 + t_5 = 3 & (3) \\ t_4 + t_5 + t_6 = -3 & (4) \\ t_5 + t_6 + t_7 = -9 & (5) \\ t_6 + t_7 + t_8 = -6 & (6) \\ t_7 + t_8 + t_1 = -2 & (7) \\ t_8 + t_1 + t_2 = 2 & (8) \end{cases}$$

Giải : Cộng tất cả phương trình đã cho được 3 lần tổng tất cả tám ẩn. Tiếp đó cộng (1), (4) và (7) sẽ tìm được $t_1 = 1$.

Bằng cách tương tự, ta tìm được giá trị các ẩn còn lại. Hệ đã cho có nghiệm là :

$$t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3,\ t_4 = 4,\ t_5 = -4,\ t_6 = -3,\ t_7 = -2 \text{ và } t_8 = -1.$$

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Một số bài tập hay

Ta có thể giải một số bài tập sau đây :

1. Có thể nói gì về các số x và y nếu :

a) $[x + y] = y$ b) $\{x + y\} = y$?

2. Số nào lớn hơn : $[a]$ và $\{a\}$?

3. Hiệu $x - y$ sẽ thế nào nếu :

a) $[x] = [y]$ b) $\{x\} = \{y\}$?

4. Tìm $x = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \ldots + [\sqrt{15}]$.

5. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm : $2\{x\} = 1 - \frac{x}{2}$?

6. Giải phương trình :

a) $[x + 1] + [x - 2] - [x + 3] = 2$

b) $[x + 4] - [x + 1] = 2$.

7. Giải hệ : $\begin{cases}[x + y + 4] = 18 - y \\ [x + 1][y - 1] = 18 - x - y.\end{cases}$

Cách giải như sau :

1. a) $x \in [0; 1], y \in \mathbb{Z}$

b) $x \in \mathbb{Z}, y \in [0; 1]$.

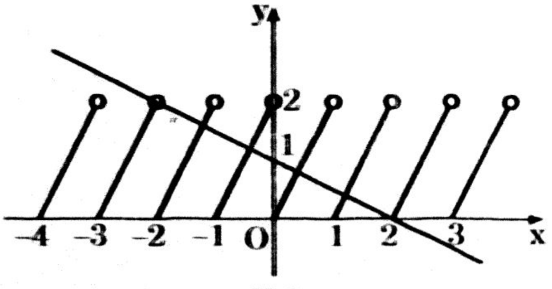
2. $[a] > \{a\}$ nếu $a \geq 1$, $\{a\} \geq [a]$ nếu $a < 1$.

3. a) $|x - y| < 1$

b) $x - y \in \mathbb{Z}$.

4. $x = 1.3 + 2.5 + 3.7 = 34$.

5. Chỉ cần vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ $y = 2\{x\}$ và $y = 1 - \frac{x}{2}$ (hình 3). Chúng cắt nhau tại 5 điểm, do đó phương trình đã cho có 5 nghiệm.



H.3

6. Các phương trình đã cho có thể viết dưới dạng đơn giản nếu chú ý rằng : $[a + n] = [a] + n$ (với $n \in \mathbb{Z}$). Ta có :

a) $[x] + 1 + [x] - 2 - [x] - 3 = 2$, từ đó $[x] = 6$ nên $0 \leq x < 7$.

b) $[x] + 4 - [x] - 1 = 2$ hay $0[x] + 3 = 2$, vô nghiệm.

7. Vì vế trái là số nguyên nên hệ có nghiệm nếu vế phải cũng là số nguyên, do đó x và y phải là số nguyên.

Như thế hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases}x + y + 4 = 18 - y \\ x + 1 + y - 1 = 18 - x - y\end{cases}$$

Từ đó $x = 4$, $y = 5$.

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. **Phương trình bậc hai** một ẩn có dạng tổng quát

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (*)$$

Cách giải : Trước tiên tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.

$\Delta < 0$: (*) vô nghiệm.

$\Delta = 0$: (*) có một nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.

$\Delta > 0$: (*) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Trường hợp đặc biệt :

Nếu a và c trái dấu, (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Nếu $b = 2b'$ thì $\Delta' = b'^2 - ac$ và (*) có nghiệm thu gọn là

$$x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

2. **Định lí Viét**

a) Nếu (*) có hai nghiệm x_1 và x_2 thì tổng và tích các nghiệm đó là :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad P = x_1.x_2 = \frac{c}{a}$$

Từ đó nếu các hệ số của (*) thỏa mãn điều kiện :

$a + b + c = 0$ thì (*) có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.

$a - b + c = 0$ thì (*) có một nghiệm $x_1 = -1$ và nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Định lí Viét có thể ứng dụng để :

- Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.
- Tìm hai số biết tổng và tích của chúng : nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình :

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (\text{với điều kiện } S^2 - 4P \geq 0).$$

b) Phân tích một tam thức bậc hai thành nhân tử :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

trong đó x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

c) Xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai :

Phương trình (*) có : 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$

2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S > 0$

2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$, $P > 0$ và $S < 0$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Giải các phương trình :

a) $\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2 + \left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^2 - \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0$

b) $\dfrac{1}{y^3 - y^2 + y - 1} - \dfrac{4}{y+1} = \dfrac{y^2 + 10y}{y^4 - 1} - \dfrac{4y^2 + 21}{y^3 + y^2 + y + 1}$.

2. Giải :

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = 4 + 2x + x^2$ b) $y(y+1)(y+2)(y+3) = 0{,}5625$.

3. Giải :

a) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ b) $(y+1)^4 = 2(1 + y^4)$.

4. Chứng minh rằng hai phương trình bậc hai :

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 + p_2x + q_2 = 0,$$

mà biệt thức đều không âm, có ít nhất một nghiệm chung khi và chỉ khi

$$(q_2 - q_1)^2 = (p_2 - p_1)(p_1q_2 - q_1p_2).$$

5. Giải : $t^2.\dfrac{(n+t)(t+p)}{(t-n)(t-p)} + n^2.\dfrac{(n+p)(n+t)}{(n-p)(n-t)} + p^2.\dfrac{(p+t)(p+n)}{(p-t)(p-n)} = (n+p)^2$.

6. Chứng minh rằng phương trình : $(z-a)(z-c) + k(z-b)(z-d) = 0$ luôn có nghiệm với mọi k, nếu $a < b < c < d$.

7. Nhà toán học Pháp Đê-cac đã có bài toán sau :

"Giải phương trình : $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$".

Hãy giải bài toán này vì nó quy về bậc hai.

8. Tìm giá trị của tham số k trong phương trình :

$$2x^2 + (2k-1)x + k - 1 = 0$$

sao cho hai nghiệm của nó thỏa mãn hệ thức $3x_1 - 4x_2 = 11$.

9. Lập phương trình bậc hai mà nghiệm của nó bằng lập phương các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

10. Tìm giá trị của tham số k trong phương trình $x^2 - kx + k - 1 = 0$ sao cho tổng các nghiệm của nó $x_1^2 + x_2^2$ là nhỏ nhất.

11. a) Chứng minh rằng phương trình bậc ba $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có các hệ thức sau giữa các nghiệm và các hệ số :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}; \quad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

b) Áp dụng để giải phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ nếu giữa các nghiệm của nó có hệ thức :

α) $x_2 = \dfrac{x_1 + x_3}{2}$ β) $x_2 = \sqrt{x_1x_3}$.

12. Giải phương trình : $(x^3 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 + 2x - 1)^3$.

13. Giải : $\dfrac{x}{a} = \{x\}$, trong đó $\{x\} = x - [x]$.

14. Giải : $(2y^2 - 3y + 1)(2y^2 + 5y + 1) = 9y^2$.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Điều kiện : $x \neq \pm 1$.

Đặt ẩn phụ : $\dfrac{x+2}{x+1} = u$, $\dfrac{x-2}{x-1} = v$. Phương trình đã cho trở thành

$$u^2 + v^2 - \frac{5}{2}uv = 0$$

Giải ra được u = 2v, hoặc v = 2u.

- Nếu u = 2v thì $\dfrac{x+2}{x+1} = 2.\dfrac{x-2}{x-1}$, hay $2x^2 - 2x - 4 = x^2 + x - 2$; từ đó ta được phương trình bậc hai $x^2 - 3x - 2 = 0$. Giải ra được nghiệm là : $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

- Nếu v = 2u thì $\dfrac{x-2}{x-1} = 2.\dfrac{x+2}{x+1}$, hay $x^2 + 3x - 2 = 0$, mà nghiệm là :

$$x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2},\ x_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2},\ x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2},\ x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

b) Trước hết ta phân tích các mẫu thành nhân tử :

$$y^3 - y^2 + y - 1 = y^2(y-1) + (y-1) = (y-1)(y^2+1)$$
$$y^4 - 1 = (y^2+1)(y^2-1)$$
$$y^3 + y^2 + y + 1 = y^2(y+1) + (y+1) = (y+1)(y^2+1).$$

Do đó MC = $(y^2 + 1)(y^2 - 1)$, với điều kiện $y \neq \pm 1$.

Quy đồng mẫu rồi khử mẫu được :

$$y + 1 - 4(y - 1)(y^2 + 1) = y^2 + 10y - (4y^2 + 21)(y - 1)$$

hay $y + 1 - 4y^3 - 4y + 4y^2 + 4 = y^2 + 10y - 4y^3 + 4y^2 - 21y + 21;$

$$-3y + 5 = y^2 - 11y + 21$$

Từ đó được phương trình bậc hai $y^2 - 8y + 16 = 0$.

Phương trình cuối này có dạng $(y - 4)^2 = 0$ nên có nghiệm kép là $y_1 = y_2 = 4$, thỏa mãn điều kiện $y \neq \pm 1$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình :*

a) $(t^2 - 16t)^2 - 2(t^2 - 16t) - 63 = 0$

b) $(z^2 + z + 1)(z^2 + z + 2) - 12 = 0.$

Giải :

a) Đặt ẩn phụ $t^2 - 16t = u$, phương trình đã cho có dạng :

$u^2 - 2u - 63 = 0$. Giải ra được $u_1 = 9$, $u_2 = -7$.

Như vậy ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$t^2 - 16t - 9 = 0$ mà nghiệm là $8 \pm \sqrt{73}$

$t^2 - 16t + 7 = 0$ mà nghiệm là $8 \pm \sqrt{57}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là :

$$t_1 = 8 + \sqrt{73},\ t_2 = 8 - \sqrt{73},\ t_3 = 8 + \sqrt{57},\ t_4 = 8 - \sqrt{57}.$$

b) Đặt $z^2 + z + 1 = v$, phương trình đã cho có dạng :

$v(v + 1) - 12 = 0$ hay $v^2 + v - 12 = 0$.

Giải ra được $v_1 = 3$, $v_2 = -4$.

Như vậy, ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$z^2 + z + 1 = 3$ hay $z^2 + z - 2 = 0$, mà nghiệm là $z_1 = 1$, $z_2 = -2$.

$z^2 + z + 1 = -4$ hay $z^2 + z + 5 = 0$, vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1 = 1$, $z_2 = -2$.

2. a) Đặt ẩn phụ $x^2 + 2x + 3 = u$, phương trình đã cho có dạng :

$\dfrac{u + 4}{u} = u + 1$ hay $u^2 = 4$, từ đó $u_1 = 2$, $u_2 = -2$.

Ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$x^2 + 2x + 3 = 2$ hay $x^2 + 2x + 1 = 0$, giải ra được $x_{1,2} = -1$.

$x^2 + 2x + 3 = -2$ hay $x^2 + 2x + 5 = 0$, vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm kép là $x_{1,2} = -1$.

b) Lưu ý : số thập phân 0,5625 bằng phân số $\frac{9}{16}$, tức là ta phải giải phương trình $y(y+1)(y+2)(y+3) = \frac{9}{16}$

$$\text{hay} \quad (y^2+3y)(y^2+3y+2) = \frac{9}{16}.$$

Đặt $y^2 + 3y + 2 = v$, ta tìm được phương trình $16v^2 - 32v - 9 = 0$. Ta tính Δ' như sau :

$$\Delta' = 16^2 + 9.16 = 16(16+9) = 16.25; \qquad \sqrt{\Delta'} = 4.5 = 20.$$

Từ đó $v_1 = \frac{9}{4}$ và $v_2 = -\frac{1}{4}$.

Ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$y^2 + 3y + 2 = \frac{9}{4}$ mà nghiệm là $y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$

$y^2 + 3y + 2 = -\frac{1}{4}$ mà nghiệm là $y_{3,4} = \pm\frac{3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là :

$$y_1 = \frac{-3+\sqrt{10}}{2}, \; y_2 = \frac{-3-\sqrt{10}}{2}, \; y_3 = \frac{3}{2}, \; y_4 = -\frac{3}{2}.$$

- ***Lời bình :*** **Tương tự,** ***giải phương trình :***

$$(z+m)(z+2m)(z-3m)(z-4m) = p^4.$$

Giải : Ta có thể viết :

$$(z^2 - 2mz - 3m^2)(z^2 - 2mz - 8m^2) - p^4 = 0$$

$$\text{hay} \quad (z^2 - 2mz)^2 - 11m^2(z^2 - 2mz) + 24m^4 - p^4 = 0$$

Đặt $z^2 - 2mz = m^2t$, ta tìm được $m^2t^2 - 11m^4t + 24m^4 - p^4 = 0$

$$\text{hay} \quad t^2 - 11t + \left(24 - \frac{p^4}{m^4}\right) = 0.$$

Giải ra được : $t = \frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{25m^4 + 4p^2}}{2m^2}$, tức là :

$$z^2 - 2mz = \frac{11m^2 \pm \sqrt{25m^4 + 4p^2}}{2}.$$

Từ đó tìm được nghiệm : $z = \dfrac{2m \pm \sqrt{26m^2 \pm 2\sqrt{25m^4 + 4p^2}}}{2}$.

3. a) Do $x = 0$ không phải là nghiệm, nên ta chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ được :

$$x^2 + x - 10 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

Đặt $x + \dfrac{1}{x} = u$, ta có : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Do đó phương trình đã cho có dạng : $u^2 + u - 12 = 0$. Giải ra được $u_1 = 3$, $u_2 = -4$.

Do đó ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$x + \dfrac{1}{x} = 3$, hay $x^2 - 3x + 1 = 0$ mà nghiệm là $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x + \dfrac{1}{x} = -4$, hay $x^2 + 4x + 1 = 0$ mà nghiệm là $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2},\ x_3 = -2 + \sqrt{3},\ x_4 = -2 - \sqrt{3}.$$

b) Ta có thể viết phương trình đã cho như sau :

$$y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 = 2y^4 + 2$$

hay $y^4 - 4y^3 - 6y^2 - 4y + 1 = 0$; $\left(y^2 + \dfrac{1}{y^2}\right) - 4\left(y + \dfrac{1}{y}\right) - 6 = 0$

Đặt $y + \dfrac{1}{y} = v$, ta tìm được $y^2 + \dfrac{1}{y^2} = v^2 - 2$. Do đó phương trình đã cho có dạng $v^2 - 4v - 8 = 0$.

Giải ra được : $v_1 = 2(1 + \sqrt{3})$, $v_2 = 2(1 - \sqrt{3})$. Từ đó, giải tiếp :

$y + \dfrac{1}{y} = 2(1 + \sqrt{3})$, hay $y^2 - 2(1 + \sqrt{3})y + 1 = 0$;

$y + \dfrac{1}{y} = 2(1 - \sqrt{3})$, hay $y^2 - 2(1 - \sqrt{3})y + 1 = 0$

Giải phương trình thứ nhất được :

$$y_{1,2} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 - 1} = (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}$$

$$= (1 + \sqrt{3}) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}.\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} = (1 + \sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

Phương trình thứ hai vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là :

$$y_{1,2} = (1 + \sqrt{3})\left(1 \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình :* $(3 - z)^4 + (2 - z)^4 = (5 - 2z)^4$.

Giải : Đặt $3 - z = u$, $2 - z = v$, ta có : $5 - 2z = u + v$

Phương trình đã cho có dạng : $u^4 + v^4 = (u + v)^4$

hay $u^4 + v^4 = u^4 + v^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3$

Từ đó : $uv(2u^2 + 3uv + 2v^2) = 0$.

a) $u = 0$ hay $3 - z = 0$ nên $z_1 = 3$;

$v = 0$ hay $2 - z = 0$ nên $z_2 = 2$.

b) $2u^2 + 3uv + 2v^2 = 0$, hay

$2(3 - z)^2 + 3(3 - z)(2 - z) + 2(2 - z)^2 = 0$, vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là : $z_1 = 3$, $z_2 = 2$.

4. Giả sử $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ và x_1, x_2 là nghiệm của $f_1(x) = 0$.

Muốn các phương trình $f_1(x) = 0$ và $f_2(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm chung thì điều kiện cần và đủ là tích $f_1(x).f_2(x) = 0$, tức là :

$$(x_1^2 + p_2x_1 + q_2)(x_2^2 + p_2x_2 + q_2) = 0$$

Ta viết đẳng thức cuối này dưới dạng :

$$[x_1^2 + p_1x_2 + q_1 + (p_2 - p_1)x_1 + q_2 - q_1][x_2^2 + p_1x_2 + q_1 + (p_2 - p_1)x_2 + q_2 - q_1] = 0$$

Vì $x_1^2 + p_1x_1 + q_1 = 0$ và $x_2^2 + p_1x_2 + q_1 = 0$ nên ta có :

$$[(p_2 - p_1)x_1 + (q_2 - q_1)][(p_2 - p_1)x_2 + (q_2 - q_1)] = 0$$

tức là : $(p_2 - p_1)^2x_1x_2 + (q_2 - q_1)(p_2 - p_1)(x_1 + x_2) + (q_2 - q_1)^2 = 0$

Theo định lí Viét : $x_1 + x_2 = -p_1$, $x_1x_2 = q_1$, nên ta có :

$$(p_2 - p_1)^2q_1 - (q_2 - q_1)(p_2 - p_1)p_1 + (q_2 - q_1)^2 = 0$$

hay
$$\begin{aligned}(q_2 - q_1)^2 &= (p_2 - p_1)(q_2 - q_1)p_1 - (p_2 - p_1)q_1\\ &= (p_2 - p_1)(q_2p_1 - q_1p_1 - p_2q_1 + p_1q_1)\\ &= (p_2 - p_1)(q_2p_1 - p_2q_1).\end{aligned}$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, giải bài toán sau :

Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hai phương trình bậc hai :

$$(1 - 2m)x^2 - 6mx - 1 = 0 \quad \text{và} \quad mx^2 - x + 1 = 0$$

có ít nhất một nghiệm chung.

Giải : Áp dụng kết quả của bài toán trên ta có, với $m \neq 0$ và $1 - 2m \neq 0$, hệ thức sau :

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{1-2m}\right)^2 = \left(-\frac{1}{m} + \frac{6m}{1-2m}\right)\left(-\frac{6m}{1-2m}\cdot\frac{1}{m} - \frac{1}{1-2m}\cdot\frac{1}{m}\right)$$

Vậy tham số m phải là nghiệm của phương trình :

$$m(36m^2 + 19m - 6) = 0, \text{ với } m \neq 0.$$

Giải $36m^2 + 19m - 6 = 0$ được $m_1 = \dfrac{2}{9}$ và $m_2 = \dfrac{3}{4}$. Nhưng với $m = \dfrac{3}{4}$ thì biệt thức của phương trình $\dfrac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$ âm (loại) nên nói $m = \dfrac{2}{9}$ thì biệt thức của phương trình đã cho là dương, do đó giải ra ta chỉ được một nghiệm $m = \dfrac{2}{9}$.

5. Ta có : $t^2.\dfrac{(n + t)(t + p)}{(t - n)(t - p)} = \dfrac{t^2(n + p + t) + tnpt}{(t - n)(t - p)}$

Do đó vế trái của phương trình trở thành :

$$(n + p + t)\left[\frac{t^3}{(t - n)(t - p)} + \frac{n^3}{(n - t)(n - p)} + \frac{p^3}{(p - t)(p - n)}\right] +$$

$$+ npt\left[\frac{t}{(t - n)(t - p)} + \frac{n}{(n - t)(n - p)} + \frac{p}{(p - t)(p - n)}\right]$$

Nhưng biểu thức trong dấu [ ] thứ nhất có thể biến đổi thành $n + p + t$, còn biểu thức trong dấu [ ] thứ hai có thể biến đổi thành 0, vì vậy phương trình đã cho có dạng : $(n + p + t)^2 = (n + p)^2$.

Từ đó : $(n + p + t)^2 - (n + p)^2 = 0$

hay $(n + p + t + n + p)(n + p + t - n - p) = 0$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $t_1 = 0$, $t_2 = -2(n + p)$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình :*

$$m^3(n - p)(z - n)(z - p) + n^3(p - m)(z - p)(z - m) +$$
$$+ p^3(m - n)(z - m)(z - n) = 0$$

và chứng minh rằng nếu phương trình này có các nghiệm bằng nhau thì sẽ có một trong các đẳng thức :

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \pm \frac{1}{\sqrt{p}} = 0.$$

Giải : Phương trình đã cho có thể viết như sau :

$$(z - m)(z - n)(z - p)(n - p)(p - m)(m - n)\left[\frac{m^3}{(z - m)(p - m)(m - n)} +\right.$$

$$\left. + \frac{n^3}{(z - n)(n - p)(m - n)} + \frac{p^3}{(z - p)(p - m)(n - p)}\right] = 0$$

Nhưng biểu thức :

$$\frac{m^3}{(m-z)(m-n)(m-p)}+\frac{n^3}{(n-z)(n-m)(n-p)}+\frac{p^3}{(p-z)(p-m)(p-n)}+$$

$$+\frac{z^3}{(z-m)(z-n)(z-p)},$$ sau khi biến đổi bằng 1.

Vì thế phương trình đã cho có dạng :

$$(z-m)(z-n)(z-p)(n-p)(p-m)(m-n)\left[1-\frac{z^3}{(z-m)(z-n)(z-p)}\right]=0,$$

hay $(n-p)(p-m)(m-n)[(z-m)(z-n)(z-p)-z^3]=0$

Giả sử m, n, p không bằng nhau, ta được :

$$(m+n+p)z^3-(mn+mp+np)z+mnp=0;$$

$$z=\frac{mn+mp+np\pm\sqrt{(mn+mp+np)^2-4mnp(m+n+p)}}{2(m+n+p)}.$$

Để các nghiệm bằng nhau cần và đủ là :

$$(mn+mp+np)^2-4mnp(m+n+p)=0$$

Từ đó: $m^2n^2+m^2p^2+n^2p^2-2m^2np-2n^2mp-2p^2mn=0$

hay $(mn+mp-np)^2-4m^2np=0$, suy ra $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2-\frac{4}{np}=0$

Vậy ta có : $$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+\frac{2}{\sqrt{np}}\right)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}-\frac{2}{\sqrt{np}}\right)=0,$$

hay $$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2-\frac{1}{m}\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2-\frac{1}{m}\right]=0$$

Cuối cùng :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)=0.$$

6. Phương trình đã cho có thể viết :

$$(1+k)z^2-(a+c+kb+kd)z+ac+kbd=0$$

Biệt thức $\Delta(k)=(a+c+kb+kd)^2-4(1+k)(ac+kbd)$

$$=k^2(b-d)^2+2k(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)+(a-c)^2$$

Ta chứng minh rằng $\Delta(k)\geq 0$ với mọi k. Thật thế, vì $\Delta(k)$ là một tam thức bậc hai đối với k và $\Delta(0)=(a-c)^2>0$, nên chỉ cần chứng minh nó vô nghiệm, tức là :

$$4(ab+ad+bc+dc-2bd-2ac)^2-4(a-c)^2(b-d)^2<0$$

Ta có vế phải bằng :

$$4(ab + ad + bc + dc - 2bd - 2ac - ab + cb + ad - cd) \times$$

$$\times (ab + ad + bc + dc - 2bd - 2ac + ab - cb - ad + cd) =$$

$= -16(b - a)(d - c)(c - b)(d - a) < 0$, vì theo bài ra $a < b < c < d$.

- **Lời bình :** Tương tự, *chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm :*

$$(t - m)(t - n) + (t - m)(t - p) + (t - n)(t - p) = 0.$$

Giải : Phương trình đã cho có thể viết :

$$3t^2 - 2(m + n + p)t + mn + mp + np = 0$$

Ta chứng minh rằng biệt thức $\Delta \geq 0$, tức là :

$$4(m + n + p)^2 - 12(mn + mp + np) \geq 0.$$

Ta có : $\Delta = 4(m^2 + n^2 + p^2 - mn - mp - np)$

$$= 2(2m^2 + 2n^2 + 2p^2 - 2mn - 2mp - 2np)$$

$$= 2[(m^2 - 2mn + n^2) + (m^2 - 2mp + p^2) + (m^2 - 2np + p^2)]$$

$$= 2[(m - n)^2 + (m - p)^2 + (n - p)^2] \geq 0.$$

7. Dùng cách phân tích thành nhân tử, ta có thể viết phương trình như sau : $x^3(x - 4) - 19x(x - 4) + 30(x - 4) = 0$

hay $(x - 4)(x^3 - 19x + 30) = 0$;

$$(x - 4)(x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 10x + 30) = 0$$

Ta được phương trình tích sau : $(x - 4)(x - 3)(x^2 - 3x - 10) = 0$.

Giải ra được 4 nghiệm là : $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -5$.

8. Theo định lí Vi-et ta có : $x_1 + x_2 = \dfrac{1 - 2k}{2}$ và $x_1x_2 = \dfrac{k - 1}{2}$

Giải phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

hay $x^2 - \dfrac{1 - 2k}{2}x + \dfrac{k - 1}{2} = 0$; $2x^2 - (1 - 2k)x + k - 1 = 0$, được :

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ và } x_2 = 1 - k, \text{ hoặc } x_1 = 1 - k \text{ và } x_2 = -\frac{1}{2}$$

Lần lượt thay các giá trị này vào hệ thức $3x_1 - 4x_2 = 11$, ta có :

$$3.\left(-\frac{1}{2}\right) - 4(1 - k) = 11, \text{ từ đó } k_1 = \frac{33}{8};$$

$$3(1 - k) - 4.\left(-\frac{1}{2}\right) = 11, \text{ từ đó } k_2 = -2.$$

- **Lời bình :** Giải thêm bài toán sau :

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ *(*)*

*Hãy lập phương trình **bậc hai khác sao cho** :*

*a) Có nghiệm bằng **nghiệm của phương** trình (*) nhưng khác dấu.*

*b) Có nghiệm bằng số **nghịch đảo của phương** trình (*).*

*c) Có nghiệm lớn **hơn (nhỏ hơn)** nghiệm của phương trình (*) là n.*

*d) Có nghiệm lớn **hơn (nhỏ hơn) n lần nghiệm** của phương trình (*).*

Giải : Giả sử phương **trình (*) có nghiệm** là x_1 và x_2.

Thế thì theo định lí **Viét, ta có** : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = p,\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = q$ (1)

và phương trình **phải tìm có dạng** $x^2 + px + q = 0$ (2)

Bài toán quy về : tìm **các hệ số p và q theo** các trường hợp sau :

a) Nếu phương trình **(2) có nghiệm** là $(-x_1)$ và $(-x_2)$ thì

$$p = -(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a};\quad q = (-x_1)(-x_2) = \frac{c}{a}$$

Từ đó ta có **phương trình phải tìm** là :

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,\ \text{tức là : } ax^2 - bx + c = 0.$$

b) Nếu phương trình **(2) có nghiệm** là $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ thì

$$p = -\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) = \frac{-(x_1 + x_2)}{x_1x_2} = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{c};$$

$$q = \frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = 1 : \frac{c}{a} = \frac{a}{c}.$$

Từ đó ta có **phương trình phải tìm** là :

$$x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c} = 0,\ \text{tức là : } cx^2 + bx + a = 0.$$

c) Nếu nghiệm **của (2) là** $x_1 + n$ và $x_2 + n$ thì

$$p = -(x_1 + x_2 + 2n) = -\left(-\frac{b}{a} + 2n\right) = \frac{b}{a} - 2n;$$

$$q = (x_1 + n)(x_2 + n) = x_1x_2 + (x_1 + x_2)n + n^2 = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2$$

Phương trình **phải tìm là** :

$$x^2 + \left(\frac{b}{a} - 2n\right)x + \frac{c}{a} - \frac{b}{a}n + n^2 = 0,\ \text{tức là}$$

$$ax^2 + (b - 2an)x + (an^2 - bn + c) = 0.$$

d) Nếu nghiệm của (2) là nx_1 và nx_2 thì

$$p = -n(x_1 + x_2) = \frac{nb}{a}; \quad q = n^2x_1x_2 = \frac{n^2c}{a}$$

Phương trình phải tìm là :

$$x^2 + \frac{nb}{a}x + \frac{n^2c}{a} = 0, \text{ tức là : } ax^2 + nbx + n^2c = 0.$$

9. Gọi nghiệm của phương trình bậc hai phải tìm là $z = x^3$ hay $x = \sqrt[3]{z}$. Ta được $a\sqrt[3]{z^2} + b\sqrt[3]{z} + c = 0$.

Lập phương hai vế ta có :

$$a^3z^2 + 3abz(a\sqrt[3]{z^2} + b\sqrt[3]{z}) + b^3z = -c^3, \text{ tức là :}$$

$$a^3z^2 - 3abcz + b^3z + c^3 = 0 \text{ hay } a^3z^2 - (3abc - b^3)z + c^3 = 0.$$

Vậy phương trình phải tìm là : $a^3z^2 + b(b^2 - 3ac)z + c^3 = 0$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Không giải phương trình $x^2 + px + q = 0$, hãy tìm tổng các lập phương các nghiệm của nó.

Giải : Gọi x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình đã cho ta có :

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$$

Thay $x_1 + x_2 = -p$ và $x_1x_2 = q$ ta được :

$$x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q) = p(3q - p^2).$$

10. Theo định lí Viét ta có : $x_1 + x_2 = k$; $\quad x_1x_2 = k - 1$.

Ngoài ra $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = k^2 - 2(k - 1) = (k - 1)^2 + 1$

Từ hệ thức cuối suy ra tổng $x_1^2 + x_2^2$ có giá trị nhỏ nhất khi $(k - 1)^2 = 0$, tức là khi $k - 1 = 0$ hay $k = 1$.

- ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán sau :

Với giá trị nào của tham số m thì hai phương trình :

$$2z^2 - (3m + 2)z + 12 = 0 \quad \text{và} \quad 4z^2 - (9m - 2)z + 36 = 0$$

có nghiệm chung ?

Giải : Từ phương trình thứ nhất ta có : $m = \dfrac{2z^2 - 2z + 12}{3z}$ $(z \neq 0)$ $\quad (*)$

Thay giá trị này vào phương trình thứ hai sẽ được phương trình bậc hai $z^2 - 4z = 0$ mà nghiệm là $z_1 = 0$ (loại), $z_2 = 4$.

Thay $z = 4$ vào (*) sẽ được $m = 3$.

11. a) Gọi ba nghiệm của phương trình là x_1, x_2, x_3, ta có :

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

So sánh với các hệ số của x^3, x^2, x và d của phương trình :

$$ax^3 + bx^2 + 2x + d = 0$$

ta suy ra các hệ thức cần chứng minh.

b) Áp dụng các hệ thức trên ta có thể viết :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \qquad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b \qquad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = c \qquad (3)$$

α) Nếu $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ (4) thì từ các hệ thức (1), (2), (3), (4) ta được :

$$x_1 = \frac{-a^2 + \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a}; \qquad x_2 = -\frac{a}{3}; \qquad x_3 = \frac{-a^2 - \sqrt{a^4 - 27ac}}{3a}.$$

β) Nếu $x_2 = \sqrt{x_1x_3}$ (5) thì từ các hệ thức (1), (2), (3), (5) ta được :

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt[3]{c} - \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}}{2}; \qquad x_2 = -\sqrt[3]{c};$$

$$x_3 = \frac{-a + \sqrt[3]{c} + \sqrt{a^2 - 2a\sqrt[3]{c} - 3\sqrt[3]{c^2}}}{2}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh rằng nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình bậc ba $x^3 - x + 1 = 0$ thì ta có tổng : $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -5$.*

Giải : Theo các hệ thức của câu a) ta có :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1; \quad x_1x_2x_3 = -1.$$

Ta tính $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = [-(x_2 + x_3)^5 + x_2^5 + x_3^5] = -5\ (\ldots)$

Sau khi tính toán : $(\ldots) = x_2^4x_3 + 2x_2^3x_3^2 + 2x_2^2x_3^3 + x_2x_3^4 = 1$. Do đó tổng phải tìm đúng bằng –5.

Tuy nhiên có *cách giải đơn giản hơn* như sau :

Ta có $x_1^3 - x_1 + 1 = 0$ hay $x_1^3 = x_1 - 1$, suy ra :

$x_1^5 = x_1^3 - x_1^2 = -x_1^2 + x_1 - 1$. Tương tự đối với x_2 và x_3.

Do đó : $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) - 3 \qquad (*)$

(vì $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0 - 2 = -2$)

Vậy (*) có giá trị $-2 - 3 = -5$.

12. Đặt $u = x^2 + 3x - 4$, $v = 2x^2 - 5x + 3$, phương trình đã cho có thể viết :

$$u^3 + v^3 = (u + v)^3 \quad \text{hay} \quad 3uv(u + v) = 0.$$

Từ đó : $x^3 + 3x - 4 = 0$ hoặc $2x^2 - 5x + 3 = 0$,

hoặc $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Giải ra tìm được bốn nghiệm là : $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = \frac{3}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.

- ***Lời bình :*** *Có thể giải thêm hai phương trình sau :*

a) $\dfrac{x\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = 12 \quad (x \neq \pm 1)$

b) $2\sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{27 - 14x} = 1.$

Giải :

a) Phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x} - 1} = 12$$

hay $\sqrt[3]{x^2} + 1 - \sqrt[3]{x} - 1 = 12$; $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$.

Đặt $\sqrt[3]{x} = y$ ta có $y^2 - y - 12 = 0$ mà nghiệm là $y_1 = 4$, $y_2 = -3$. Tì đó tìm được ngay $x_1 = 64$, $x_2 = -27$ thỏa mãn điều kiện $x \neq \pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 64$, $x_2 = -27$.

b) Đặt $\sqrt[3]{x - 1} = y$, ta có $x = y^3 + 1$ và phương trình đã cho có thể viết :

$$\sqrt[3]{27 - 14(y^3 + 1)} = 1 - 2y$$

hay $13 - 14y^3 = 1 - 6y + 12y^2 - 8y^3$;

$y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0$ hay $(y + 2)(y^2 - 1) = 0$

Giải ra được $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = -2$. Từ đó $\sqrt[3]{x - 1} = 1; -1; -2$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là 2; 0 và –7.

13. Ta phải có $a \neq 0$. Lưu ý rằng : $x = [x] + \{x\}$ (1)

và $0 \leq \{x\} < 1$ (2)

Với $a = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $x = \{x\}$ nên có vô số nghiện là $0 \leq x < 1$.

Hơn nữa từ (1) ta có với $a \neq 1$:

$$[x] + \{x\} = a\{x\} \quad \text{hay} \quad \{x\} = \frac{[x]}{a-1} \qquad (3)$$

Do $x = a\{x\}$ nên $x = \dfrac{a[x]}{a-1}$ (4)

Từ (2), (3) được $0 \leq \dfrac{[x]}{a-1} < 1$ với dấu của $[x]$ trùng với dấu của $(a - 1)$

và $\big|[x]\big| < |a - 1|$ (5)

Kết hợp (5) và (4) ta suy ra các nghiệm của phương trình đã cho như sau :

Với $0 < a < 1$ thì $x = \dfrac{a[x]}{a-1}$, $[x] = 0, -1, -2, ..., \leq [a]$;

Với $0 < a < 1$ thì $x = 0$;

Với $a = 1$ thì $0 \leq x < 1$;

Với $1 < a \leq 2$ thì $x = 0$;

Với $a > 2$ thì $x = \dfrac{a[x]}{a-1}$,

$[x] = 0, 1, 2, ..., (n - 2)$ trong đó n là số tự nhiên thỏa mãn $a \leq n < n + 1$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình* : $[y] + \dfrac{1}{[y]} = \{y\} + \dfrac{1}{\{y\}}$.

Giải : Phương trình đã cho có thể viết : $([y] - \{y\})\left(1 - \dfrac{1}{[y]\{y\}}\right) = 0$

với điều chú ý là : từ đẳng thức $[y] = \{y\}$ suy ra $\{y\} \in \mathbb{Z}$, $\{y\} = 0$ nên trong miền xác định của phương trình thì $[y] \neq \{y\}$.

Vậy phương trình đã cho có dạng : $[y].\{y\} = 1$, từ đó đặc biệt ta có $[y] > 0$, tức là $y > 0$ và nếu $[y] = n$ tự nhiên thì với $n > 1$ ta có :

$$\{y\} = \frac{1}{n} \quad \text{nên} \quad y = [y] + \{y\} = n + \frac{1}{n}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $y_n = n + \dfrac{1}{n}$ (n tự nhiên ≥ 2).

14. Do $y = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có thể chia hai vế cho $y^2 \neq 0$ và được phương trình :

$$\left(2y - 3 + \frac{1}{y}\right)\left(2y + 5 + \frac{1}{y}\right) = 9$$

Đặt $2y + \dfrac{1}{y} = t$, ta được : $(t - 3)(t + 5) = 9$. Giải ra được $t_1 = -6$, $t_2 = 4$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với hai phương trình :

$$2y + \frac{1}{y} = -6 \text{ mà nghiệm là } y_1 = \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \text{ và } y_2 = \frac{-3+\sqrt{7}}{2};$$

$$2y + \frac{1}{y} = 4 \text{ mà nghiệm là } y_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ và } y_4 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm là $y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ và $y_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình :*

$$(12z - 1)(6z - 1)(4z - 1)(3z - 1) = 5.$$

Giải : Phương trình đã cho có thể viết :

$$\left(z - \frac{1}{12}\right)\left(z - \frac{1}{6}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3.4.6.12}$$

Vì $\frac{1}{12} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ và $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ nên ta đưa vào ẩn phụ

$$t = \frac{1}{4}\left[\left(z - \frac{1}{12}\right) + \left(z - \frac{1}{6}\right) + \left(z - \frac{1}{4}\right) + \left(z - \frac{1}{3}\right)\right] = z - \frac{5}{24}, \text{ hay } z = t + \frac{5}{24}.$$

Thay $z = t + \frac{5}{24}$ vào phương trình đã cho được :

$$\left(t + \frac{3}{24}\right)\left(t + \frac{1}{24}\right)\left(t - \frac{1}{24}\right)\left(t - \frac{3}{24}\right) = \frac{5}{3.4.6.12},$$

hay $$\left[t^2 - \left(\frac{1}{24}\right)^2\right].\left[t^2 - \left(\frac{3}{24}\right)^2\right] = \frac{5}{3.4.6.12}$$

Từ đó tìm được $t^2 = \frac{49}{24^2}$, tức là $t_1 = \frac{7}{24}$, $t_2 = -\frac{7}{24}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $z_1 = -\frac{1}{12}$; $z_2 = \frac{1}{2}$.

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Căn bậc hai các số có gì thú vị ?

1. Trước tiên là xét 6 ví dụ thú vị sau :

$\sqrt{8281} = 82 + \sqrt{81} = 100 - 9$; $\sqrt{11664} = 116 - \sqrt{64} = 100 + 8$;

$\sqrt{36864} = 368.\frac{1}{2} + \sqrt{64} = 200 - 8$; $\sqrt{43681} = 436.\frac{1}{2} - \sqrt{81} = 200 + 9$;

$\sqrt{84681} = 846.\frac{1}{3} + \sqrt{81} = 300 - 9$; $\sqrt{95481} = 954.\frac{1}{3} - \sqrt{81} = 300 + 9$.

Ta có thể tự lập các căn bậc hai dạng $100a + b^2$ sao cho

$$\sqrt{100a + b^2} = a.\frac{1}{k} + b \quad \text{(k và a là số tự nhiên, b nguyên).}$$

Cho k một giá trị bất kì, b là số nguyên nào đó, giá trị của a được tính theo công thức $a = 100k^2 - 2kb$.

Ví dụ : a) Giả sử $k = 3$, $b = -7$, thế thì $a = 942$ và ta có :

$$\sqrt{94249} = 942.\frac{1}{3} - 7 = 300 + 7$$

b) Giả sử $k = 2$, $b = 13$, thế thì $a = 348$ và ta có :

$$\sqrt{348.100 + 13^2} = 348.\frac{1}{2} + 13 = 200 - 13$$

Có thể chứng tỏ dễ dàng rằng với $a = 100k^2 - 2kb$ (k tự nhiên, b nguyên) số $\sqrt{100a + b^2} = 100k - b$ và có thể viết thành tổng $a.\frac{1}{k} + b$, tức là ta có một hằng đẳng thức :

$$\sqrt{100a + b^2} = a.\frac{1}{k} + b = 100k - b, \text{ nếu } a = 100k^2 - 2kb.$$

2. *Lại có thể viết một số tận cùng bằng 9 theo công thức*

$$\overline{a_1a_2...a_{n-1}9} = \overline{a_1a_2...a_{n-1}}.9 + \overline{a_1a_2...a_{n-1}} + 9.$$

Thử lại dễ dàng bằng cách làm phép cộng ở vế phải :

$$\overline{a_1a_2...a_{n-1}}.9 + \overline{a_1a_2...a_{n-1}} = \overline{a_1a_2...a_{n-1}}.10 = \overline{a_1a_2...a_{n-1}0}$$

và tiếp đó $\overline{a_1a_2...a_{n-1}0} + 9 = \overline{a_1a_2...a_{n-1}9}$.

Ví dụ : a) $59 = 5.9 + 5 + 9$

b) $1989 = 198.9 + 198 + 9$.

§5. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Phương trình trùng phương

Đó là phương trình có dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ mà cách giải là dùng ẩn phụ : đặt $x^2 = y$ để đưa về dạng bậc hai quen thuộc $ay^2 + by + c = 0$.

Nếu phương trình $ay^2 + by + c = 0$ lần lượt có hai nghiệm dương, một nghiệm dương, hai nghiệm âm, vô nghiệm thì phương trình trùng phương lần lượt có bốn nghiệm, hai nghiệm, vô nghiệm, vô nghiệm.

Chẳng hạn : Phương trình $3x^4 - 18x^2 - 21 = 0$ với $3y^2 - 18y - 21 = 0$ có $a - b + c = 0$ nên có hai nghiệm $y_1 = -1$ và $y_2 = 7$. Nhưng chỉ có nghiệm dương $x^2 = 7$ hay $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ (loại nghiệm âm $y_1 = -1$).

Phương trình $x^4 + 2(\sqrt{3} + 1)x^2 + 2\sqrt{3} = 0$ với $y^2 + 2(\sqrt{3} + 1)y + 2\sqrt{3} = 0$ có hai nghiệm âm $y = 1 - \sqrt{3}$ và $y_2 = -(\sqrt{3} + 3)$ nên phương trình trùng phương vô nghiệm.

2. Phương trình hữu tỉ

Đó là phương trình có dạng $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (*),

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là những đa thức với $Q(x) \neq 0$.

Giải phương trình hữu tỉ (*) quy về giải phương trình $P(x) = 0$ và thử lại xem nghiệm của nó có thỏa mãn điều kiện $Q(x) \neq 0$ không, tức là phương trình (*) tương đương với hệ $\begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Chẳng hạn, giải phương trình $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x+2} = 1$.

Phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2} - 1 = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{x + 2 - 2(x-1) - (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{x^2 + 2x - 6}{(x-1)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 6 = 0 \\ (x-1)(x+2) \neq 0 \end{cases}$$

Giải $x^2 + 2x - 6 = 0$ được hai nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$ thỏa mãn điều kiện $(x - 1)(x + 2) \neq 0$. Đó là hai nghiệm của phương trình đã cho.

3. Phương trình vô tỉ

Đó là phương trình chứa ẩn dưới dấu căn. Lưu ý :

- Tất cả *căn bậc chẵn* trong phương trình là căn số học. Do đó nếu biểu thức dưới dấu căn mà âm thì không có nghĩa, nếu mà bằng 0 thì nghiệm cũng bằng 0, nếu mà là số dương thì nghiệm là dương.
- Tất cả *căn bậc lẻ* trong phương trình được xác định với mọi giá trị thực của biểu thức dưới dấu căn. Do đó nếu căn này mà âm thì biểu thức dưới dấu căn là âm, nếu mà bằng 0 thì biểu thức dưới dấu căn bằng 0, nếu mà dương thì biểu thức dưới dấu căn là dương.

Chẳng hạn ta có phương trình $\sqrt{x+2} = -2$ vô nghiệm.

Với phương trình $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$, ta lập phương hai vế được :

$$3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 1$$

hay $\quad 3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)} = 1.$

Lại lập phương tiếp hai vế được : $(2x - 1)(x - 1) = (1 - x)^3$ có nghiệm là $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Thử lại chỉ có nghiệm $x_2 = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Phương trình trùng phương

1. a) Chứng minh rằng nếu x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ thì giữa các nghiệm và các hệ số có các hệ thức sau :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{b}{a};$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0;$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{c}{a}.$$

b) Tìm tổng các nghiệm, tổng các bình phương, các lập phương, các lũy thừa bậc bốn, các lũy thừa bậc năm của phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

2. Tìm hệ thức giữa các hệ số p và q của phương trình trùng phương $x^4 + px^2 + q = 0$ biết rằng các nghiệm của nó là $\pm x_1$ và $\pm x_2$ thỏa mãn hệ thức $x_1 = 3x_2$.

Phương trình hữu tỉ

3. Giải các phương trình hữu tỉ sau :

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} = 1$ b) $\dfrac{4y}{y^2 + y + 3} + \dfrac{5y}{y^2 - 5y + 3} = -\dfrac{3}{2}.$

4. Giải : a) $\dfrac{z+1}{z-1}+\dfrac{z-2}{z+2}+\dfrac{z-3}{z+3}+\dfrac{z+4}{z-4}=4$

b) $t^2+\left(\dfrac{t}{t-1}\right)^2=8.$

Phương trình vô tỉ

5. Giải các phương trình vô tỉ sau :

a) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$

b) $\dfrac{\sqrt{21+y}+\sqrt{21-y}}{\sqrt{21+y}-\sqrt{21-y}}=\dfrac{21}{y}$ $(y\neq 0).$

6. Giải : a) $\sqrt{z-2+\sqrt{2z-5}}+\sqrt{z+2+3\sqrt{2z-5}}=7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{t-\dfrac{1}{t}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{t}}=\dfrac{t-1}{t}$ $(t\neq 0).$

7. Giải : a) $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$

b) $\sqrt{11y+3}-\sqrt{2-y}-\sqrt{9y+7}-\sqrt{y-2}=0.$

8. Giải : a) $\sqrt[3]{z+1}+\sqrt[3]{z+2}+\sqrt[3]{z+3}=0$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{t+3}{5t+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5t+2}{t+3}}=\dfrac{13}{6}.$

Một số phương trình khác

9. Giải phương trình :

a) $2\left(x^4+\dfrac{16}{x^4}\right)-9\left(x^3+\dfrac{8}{x^3}\right)+20\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)-33\left(x+\dfrac{2}{x}\right)+46=0$

b) $\sqrt{y^2-\dfrac{7}{y^2}}+\sqrt{y-\dfrac{7}{y^2}}=y$

10. Giải :

a) Gọi z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình bậc ba :

$z^3+kz+k=0$ $(k\neq 0)$ thỏa mãn hệ thức :

$\dfrac{z_1^2}{z_2}+\dfrac{z_2^2}{z_3}+\dfrac{z_3^2}{z_1}=-8.$ Tìm z_1, z_2 và z_3.

b) $(t^2-3t+1)(t^2+3t+2)(t^2-9t+20)=-30.$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Tam thức $ax^4 + bx^2 + c$ có thể phân tích như sau :

$$ax^4 + bx^2 + c = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Khai triển vế phải rồi so sánh các hệ số của cùng lũy thừa x^4, x^3, x^2, x và c ở hai vế ta sẽ tìm được bốn hệ thức đã nêu.

b) Do các nghiệm của phương trình trùng phương từng đôi bằng nhau về giá trị tuyệt đối nhưng trái dấu, tức là $x_1 = -x_2$, $x_3 = -x_4$ nên ta suy ra :

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 2(x_1^4 + x_3^4)$$

Nhưng $$x_1^4 + x_3^4 = (x_1^2 + x_3^2)^2 - 2x_1^3x_3^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

Từ đó : $$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \frac{2(b^2 - 2ac)}{a^2}.$$

Vậy ta có : $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -\frac{2b}{a}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = \frac{2(b^2 - 2ac)}{a^2}$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0.$$

2. Phương trình trùng phương có hai cặp nghiệm đối nhau $\pm x_1$, $\pm x_2$. Ta bình phương hệ thức $x_1 = 3x_2$ được : $x_1^2 = 9x_2^2$.

Ngoài ra lại có : $x_1^2 + x_2^2 = -p$ và $x_1^2x_2^2 = q$.

Từ đó : $\frac{q}{p^2} = \frac{9}{100}$. Vậy ta có hệ thức : $q = 0{,}09p^2$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, ta có bài toán sau :

Tìm giá trị của tham số k sao cho giữa các nghiệm của phương trình $x^4 - (3k + 2)x^2 + k^2 = 0$ *có hệ thức* $\sqrt{z_1} = 3\sqrt{z_2}$, *trong đó nghiệm của phương trình đã cho là* $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ *và* $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$.

Giải : Theo định lí Vi-et, ta có : $z_1 + z_2 = 3k + 2$ và $z_1z_2 = k^2$.

Ngoài ra lại có hệ thức $z_1 = 9z_2$.

Từ đó ta tìm được hai giá trị của k là $k_1 = 6$ và $k_2 = -\dfrac{6}{19}$.

* ***Bị chú :*** **Có thể** vận dụng ngay kết quả của bài toán trên để tìm được **ngay đáp số của** bài toán này. Thật thế, với kết quả $q = 0{,}09p^2$ ta có **ngay :** $\mathbf{k^2} = \dfrac{9}{100}(3k+2)^2 = \dfrac{9}{100}(9k^2 + 12k + 4)$

hay $100k^2 = 81k^2 + 108k + 36$, tức là phương trình ẩn k sau :

$$19k^2 - 108k - 36 = 0,$$ mà nghiệm là 6 và $-\dfrac{6}{19}$.

3. a) Phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} - 1 = 0 \text{ hay } \frac{(x-2) + 2(x+1) - (x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{(x+1)(x-2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 = 0 \\ (x+1)(x-2) \neq 0 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 2 = 0$ là $2 \pm \sqrt{6}$ **không phải là nghiệm của phương** trình $(x+1)(x-2) = 0$. Do đó phương trình đã **cho có hai nghiệm là** $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ và $x_2 = 2 + \sqrt{6}$.

b) Đặt $u = y + \dfrac{3}{y}$ ta có phương trình $\dfrac{4}{u+1} + \dfrac{5}{u-5} = -\dfrac{3}{2}$ tương đương **với phương trình** $\dfrac{u^2 + 2u - 15}{(u+1)(u-5)} = 0$. Giải ra được $u_1 = -5$, $u_2 = 3$.

Từ đó ta phải giải tiếp hai phương trình :

$y + \dfrac{3}{y} = -5$ mà nghiệm là $y_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$;

$y + \dfrac{3}{y} = 3$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là :

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \text{ và } y_2 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình :*

$$\frac{z^2 - 13z + 15}{z^2 - 14z + 15} - \frac{z^2 - 15z + 15}{z^2 - 16z + 15} = -\frac{1}{12}.$$

Giải : Do z = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên ta có **phương trình tương đương :**

$$\frac{z-13+\frac{15}{z}}{z-14+\frac{15}{z}}-\frac{z-15+\frac{15}{z}}{z-16+\frac{15}{z}}=-\frac{1}{12}.$$

Đặt $z+\frac{15}{z}=v$, ta được phương trình $\frac{v-13}{v-14}-\frac{v-15}{v-16}=-\frac{1}{12}$ mà nghiệm là $v_1=20$, $v_2=10$.

Do đó ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$z+\frac{15}{z}=20$ mà nghiệm là $10\pm\sqrt{85}$;

$z+\frac{15}{z}=10$ mà nghiệm là $5\pm\sqrt{10}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm là :

$$z_1=10+\sqrt{85};\ z_2=10-\sqrt{85};\ z_3=5+\sqrt{10};\ z_4=5-\sqrt{10}.$$

4. a) Để cho gọn ta có thể viết :

$$\frac{z+1}{z-1}=1+\frac{2}{z-1};\qquad \frac{z-2}{z+2}=1-\frac{4}{z+2};$$

$$\frac{z-3}{z+3}=1-\frac{6}{z+3};\qquad \frac{z+4}{z-4}=1+\frac{8}{z-4}.$$

Do đó phương trình đã cho có dạng gọn hơn :

$$\frac{1}{z-1}-\frac{2}{z+2}-\frac{3}{z+3}+\frac{4}{z-4}=0$$

Sau khi biến đổi ta được phương trình : $\frac{5z-8}{(z-1)(z-4)}=\frac{5z+12}{(z+2)(z+3)}$.

Vậy phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases}(5z-8)(z+2)(z+3)=(5z+12)(z-1)(z-4)\\(z-1)(z-4)(z+2)(z+3)\neq 0\end{cases}$$

Phương trình thứ nhất sau khi làm phép tính có dạng $z^2+z-\frac{16}{5}=0$.

Giải ra ta được $z_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{\frac{69}{5}}\right)$. Các nghiệm này cũng thỏa mãn điều kiện thứ hai nên chúng là nghiệm của phương trình đã cho.

b) Điều kiện $t\neq 1$. Ta có thể viết : $t^2+2t.\frac{t}{t-1}+\left(\frac{t}{t-1}\right)^2-2t.\frac{t}{t-1}=8$

hay $\left(t+\frac{t}{t-1}\right)^2-2.\frac{t^2}{t-1}=8$; $\left(\frac{t^2}{t-1}\right)^2-2.\frac{t^2}{t-1}=8$.

Đặt $\dfrac{t^2}{t-1} = v$, ta được phương trình $v^2 - 2v = 8$, mà nghiệm là $v_1 = 4$ và $v_2 = -2$. Do đó ta phải giải tiếp hai phương trình bậc hai :

$$\frac{t^2}{t-1} = 4 \quad \text{mà nghiệm là } 2;$$

$$\frac{t^2}{t-1} = -2 \quad \text{mà nghiệm là } -1 \pm \sqrt{3}.$$

Kết hợp với điều kiện $t \neq 1$, suy ra phương trình đã cho có ba nghiệm là : $t_1 = 2$; $t_2 = -1 + \sqrt{3}$; $t_3 = -1 - \sqrt{3}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải phương trình :* $x\left(\dfrac{5-x}{x+1}\right)\left(x + \dfrac{5-x}{x+1}\right) = 6.$

Giải : Đặt $x.\dfrac{5-x}{x+1} = u$, $x + \dfrac{5-x}{x+1} = v$, ta có :

$$uv = 6 \quad \text{và} \quad u + v = x.\frac{5-x}{x+1} + x + \frac{5-x}{x+1} = (x+1).\frac{5-x}{x+1} + x = 5$$

Như thế ta phải giải phương trình $X^2 - 5X + 6 = 0$, mà nghiệm là $u_1 = 3$, $v_1 = 2$ và $u_2 = 2$, $v_2 = 3$. Do đó phương trình đã cho quy về giả hai phương trình :

$$x.\frac{5-x}{x+1} = 2 \quad \text{và} \quad x + \frac{5-x}{x+1} = 3, \text{ với điều kiện } x \neq -1.$$

Giải ra được nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

5. a) Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{5}{4} \\ x \geq 1 \end{array}\right.$

Phân tích các biểu thức dưới dấu căn thành nhân tử rồi đặt thành nhân tử chung được : $\sqrt{x+1}\left(\sqrt{4x+5} - \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1}\right) = 0$

Nhân tử thứ nhất $\sqrt{x+1} = 0$ khi $x_1 = -1$.

Nhân tử thứ hai bằng 0 khi $\sqrt{4x+5} = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$ hay sau kh khử dấu căn được phương trình bậc hai $7x^2 - 26x - 45 = 0$ mà nghiệm là $x_2 = 5$ (loại nghiệm ngoại lai $x_3 = -\dfrac{9}{7}$).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = 5$.

b) Khử căn ở mẫu ta được phương trình dưới dạng :

$$\frac{21 + \sqrt{441 - y^2}}{y} = \frac{21}{y} \quad \text{hay} \quad \sqrt{441 - y^2} = 0.$$

Giải ra được $y_{1,2} = \pm 21$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $y_1 = 21$, $y_2 = -21$.

- ***Lời bình*** : Tương tự, *giải phương trình* :

$$\frac{(t+m)\sqrt{t+n}+(t+n)\sqrt{t+m}}{\sqrt{t+m}+\sqrt{t+n}}=\sqrt{mn},\quad \textit{trong đó } mn>0.$$

Giải : Phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{\sqrt{(t+m)(t+n)}(\sqrt{t+m}+\sqrt{t+n})}{\sqrt{t+m}+\sqrt{t+n}}=\sqrt{mn}$$

hay sau khi khử căn ở mẫu được : $\sqrt{(t+m)(t+n)}=\sqrt{mn}$, tức là

$$t^2+(m+n)t=0 \text{ mà nghiệm là } t_1=0,\ t_2=-(m+n).$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là :

$$t_1=0\ (m>0,\ n>0),\qquad t_2=-(m+n)\ \ (m<0,\ n<0).$$

6. a) Đặt $2z-5=u^2$, phương trình đã cho có dạng :

$$\sqrt{u^2+2u+1}+\sqrt{u^2+6u+9}=14.$$

Giải ra được một nghiệm là $u=5$.

Từ đó $2z=u^2+5=30$. Vậy $z=15$.

b) Ta có : $$\sqrt{\frac{t^2-1}{t}}-\sqrt{\frac{t-1}{t}}-\left(\sqrt{\frac{t-1}{t}}\right)^2=0$$

hay $$\sqrt{\frac{t-1}{t}}\left(\sqrt{t+1}-1-\sqrt{\frac{t-1}{t}}\right)=0.$$

Từ đó phải giải hai phương trình : $\sqrt{\frac{t-1}{t}}=0$ được $t_1=1$;

$\sqrt{t+1}-\sqrt{\frac{t-1}{t}}-1=0$, hay sau khi biến đổi được :

$$(t^2-t)-2\sqrt{t^2-t}+1=0,\ \text{tức là}\ \left(\sqrt{t^2-1}-1\right)^2=0.$$

Giải phương trình tương đương $t^2-t-1=0$ được $t_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là :

$$t_1=1,\quad t_2=\frac{1+\sqrt5}{2},\quad t_3=\frac{1-\sqrt5}{2}.$$

- ***Lời bình*** : *Ta giải thêm phương trình* :

$$\sqrt{12-\frac{12}{v^2}}+\sqrt{v^2-\frac{12}{v^2}}=v^2\quad (\textit{với } v\neq 0).$$

Giải : Phương trình đã cho có thể viết: $\sqrt{12 - \frac{12}{v^2}} = v^2 - \sqrt{v^2 - \frac{12}{v^2}}$

$$\text{hay} \quad (v^4 - 12) - 2v\sqrt{v^4 - 12} + v^2 = 0;$$

$$\left(\sqrt{v^4 - 12} - v\right)^2 = 0 \quad \text{hay} \quad \sqrt{v^4 - 12} = v.$$

Từ đó ta phải giải phương trình trùng phương $v^4 - v^2 - 12 = 0$ mà nghiệm là $v = \pm 2$. Đó cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

7. a) Điều kiện: $x \geq 2$.

Phương trình đã cho có thể viết : $3\sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + 7$

Bình phương hai vế được : $9(x + 3) = x - 2 + 14\sqrt{x - 2} + 49$

$$\text{hay} \quad 4x - 10 = 7\sqrt{x - 2}$$

Lại bình phương hai vế được : $16x^2 - 80x + 100 = 49(x - 2)$, tức là

$$16x^2 - 129x + 198 = 0.$$

Giải ra được $x_1 = 6$, $x_2 = 2\frac{1}{16}$ (loại vì là nghiệm ngoại lai).

Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm duy nhất là $x = 6$.

b) Ta biến đổi như sau :

$$11y + 3 - 2\sqrt{(11y + 3)(2 - y)} + 2 - y = 9y + 7 - 2\sqrt{(9y + 7)(y - 2)} + y - 2$$

$$\text{hay} \quad \sqrt{6 + 19y - 11y^2} = \sqrt{9y^2 - 11y - 14};$$

$$6 + 19y - 11y^2 = 9y^2 - 11y - 14.$$

Từ đó được phương trình bậc hai :

$$20y^2 - 30y - 20 = 0 \text{ hay } 2y^2 - 3y - 2 = 0.$$

Giải ra ta có : $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{1}{2}$ (loại).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $y = 2$.

- ***Lời bình :*** *Giải thêm phương trình sau :*

$$\sqrt{2v^2 + 5v - 2} - \sqrt{2v^2 + 5v - 9} = 1.$$

– *CÁCH 1.* Bằng cách thử trực tiếp ta tìm được hệ thức :

$$\left(\sqrt{2v^2 + 5v - 2}\right)^2 - \left(\sqrt{2v^2 + 5v - 9}\right)^2 = 7.$$

Hiệu hai phương trình này có thể viết:

$$\left(\sqrt{2v^2 + 5v - 2} + \sqrt{2v^2 + 5v - 9}\right)\left(\sqrt{2v^2 + 5v - 2} - \sqrt{2v^2 + 5v - 9}\right) = 7$$

Thay nhân tử thứ hai bằng 1 (theo bài ra) ta còn lại :

$$\sqrt{2v^2 + 5v - 2} + \sqrt{2v^2 + 5v - 9} = 7$$

Cộng từng vế phương trình này với phương trình đã cho được :

$\sqrt{2v^2 + 5v - 2} = 4$. Giải ra được $v_1 = 2$ và $v_2 = -\frac{9}{2}$.

Cả hai giá trị này đều thỏa mãn phương trình đã cho.

– *CÁCH 2.* Đặt $2v^2 + 5v - 2 = t$.

Phương trình đã cho có dạng $\sqrt{t} = \sqrt{t-7} + 1$.

Bình phương hai vế rồi bỏ các số hạng đồng dạng được $\sqrt{t-7} = 3$ là hệ quả của phương trình trên mà nghiệm là $t = 16$.

Trở lại ẩn đã cho v ta được phương trình : $2v^2 + 5v - 2 = 16$ cũng là hệ quả của phương trình đã cho.

Thử lại ta thấy rằng cả hai giá trị $v_1 = 2$ và $v_2 = -\frac{9}{2}$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.

8. a) Ta có thể viết : $\sqrt[3]{z+1} + \sqrt[3]{z+2} = -\sqrt[3]{z+3}$

Áp dụng công thức : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta được :

$$z + 1 + z + 2 - 3\sqrt[3]{(z+1)(z+2)}.\left(\sqrt[3]{z+1} + \sqrt[3]{z+2}\right) = -(z + 3)$$

hay, sau khi biến đổi ta có : $\sqrt[3]{(z+1)(z+2)(z+3)} = z + 2$, tức là

$$(z + 1)(z + 2)(z + 3) = (z + 2)^3.$$

Giải ra được $z = -2$. Đây cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

b) Điều kiện : $t \neq -\frac{2}{5}$; $t \neq -3$. Đặt $\sqrt[3]{\frac{t+3}{5t+2}} = s$, phương trình đã cho có dạng $s + \frac{1}{s} = \frac{13}{6}$, tức là $6s^2 - 13s + 6 = 0$ mà nghiệm là $s_1 = \frac{2}{3}$, $s_2 = \frac{3}{2}$.

Từ đó ta có : $\sqrt[3]{\frac{t+3}{5t+2}} = \frac{2}{3}$ và $\sqrt[3]{\frac{t+3}{5t+2}} = \frac{3}{2}$

hay $\frac{t+3}{5t+2} = \frac{8}{27}$ và $\frac{t+3}{5t+2} = \frac{27}{8}$.

Giải hai phương trình này được $t_1 = 5$, $t_2 = -\frac{30}{127}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là 5 và $-\frac{30}{127}$.

- ***Lời bình :*** Có thể *giải thêm phương trình :*

$$\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}} = \frac{15}{8}.\sqrt[3]{\frac{u}{15}} \qquad \textit{nếu } -1 < u < 1.$$

Giải : Khử căn ở mẫu được :

$$\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{u} = \frac{1}{8}.\sqrt[3]{15^2u} \quad \text{hay} \quad 1-u^2 = \left(1-\frac{1}{8}.\sqrt[3]{15^2u^4}\right)^2$$

Đặt $u^2 = t^3$ ta có : $1-t^3 = \left(1-\frac{t^2}{8}.\sqrt[3]{15^2}\right)^2$

$$\text{hay} \quad 15\sqrt[3]{15}.t^4 + 64t^3 - 16\sqrt[3]{15^2}.t^2 = 0.$$

Phân tích thành nhân tử ta được :

a) $t^2 = 0$, tức là $t = 0$, từ đó $u_1 = 0$.

b) $15\sqrt[3]{15}.t^2 + 64t - 16\sqrt[3]{15^2} = 0$.

Giải ra được nghiệm $t_{3,4} = \frac{-32 \pm 68}{15\sqrt[3]{15}}$, từ đó có : $t_3 = \frac{12}{5\sqrt[3]{15}}$.

Thay giá trị âm của t_4, vì $u^2 = t^3 \geq 0$ được :

$$u^2 = \frac{12^3}{5^3.15} = \frac{24^2}{25^2}, \text{ từ đó } u_{2,3} = \pm\frac{24}{25}.$$

Tóm lại phương trình đã cho có ba nghiệm là :

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{24}{25}, \quad u_3 = -\frac{24}{5}.$$

9. a) Điều kiện : $x \neq 0$. Đặt $x + \frac{2}{x} = z$, ta tính được :

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = z^2 - 4; \qquad x^3 + \frac{8}{x^3} = z^3 - 6z; \qquad x^4 + \frac{16}{x^4} = z^4 - 8z^2 + 8.$$

Phương trình đã cho bây giờ có dạng :

$$2(z^4 - 8z^2 + 8) - 9(z^3 - 6z) + 20(z^2 - 4) - 33z + 46 = 0$$

hay $2z^4 - 9z^3 + 4z^2 + 21z - 18 = 0$, mà hai nghiệm là $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

Chia vế trái cho $(z-1)(z-2)$ ta được phương trình bậc hai :

$$2z^2 - 3z - 9 = 0, \text{ mà nghiệm là } z_3 = 3,\ z_4 = -\frac{3}{2}.$$

Như vậy, ta phải giải tiếp bốn phương trình bậc hai khi lần lượt thay z bằng các giá trị 1; 2; 3 và $-\frac{3}{2}$.

Với các giá trị 1; 2 và $-\frac{3}{2}$ thì các phương trình lập được là :

$x^2 - x + 2 = 0$; $x^2 - 2x + 2 = 0$ và $2x^2 + 3x + 4 = 0$ đều vô nghiệm.

Chỉ có với giá trị $z = 3$ thì phương trình lập được $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm là 1 và 2.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) Phương trình đã cho có thể viết : $\sqrt{y^2 - \frac{7}{y^2}} = y - \sqrt{y - \frac{7}{y^2}}$ $(y > 0)$

Bình phương hai vế : $y^2 - \frac{7}{y^2} = y^2 + y - \frac{7}{y^2} - 2y\sqrt{y - \frac{7}{y^2}}$

$$\text{hay} \quad y = 2y\sqrt{y - \frac{7}{y^2}}; \quad 1 = 2\sqrt{y - \frac{7}{y^2}}.$$

Từ đó ta có phương trình :

$$4y^3 - y^2 - 28 = 0 \quad \text{hay} \quad (y - 2)(4y^2 + 7y + 14) = 0$$

mà nghiệm duy nhất là $y = 2$, vì phương trình $4y^2 + 7y + 14 = 0$ vô nghiệm. Đây cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

- ***Lời bình :*** *Có thể giải thêm phương trình :* $\sqrt{1 - z^2} = \left(\frac{2}{3} - \sqrt{z}\right)^4$.

Giải : Điều kiện : $0 \le z < 1$. Đặt $\sqrt{z} = u$ và $\frac{2}{3} - \sqrt{z} = v$, ta có :

$1 - z^2 = 1 - u^4$ và $\left(\frac{2}{3} - \sqrt{z}\right)^4 = v^4$. Do đó ta được hệ :

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u + v = \dfrac{2}{3} \\ 2(uv)^2 - \dfrac{10}{9}uv - \dfrac{65}{81} = 0 \ (*) \end{cases}$$

Giải phương trình thứ hai (*) được $uv = \frac{8 \pm \sqrt{194}}{18}$, tức là phải giải hệ :

$$\begin{cases} uv = \dfrac{8 + \sqrt{194}}{18} \\ u + v = \dfrac{2}{3} \end{cases} (1) \quad \text{và} \quad \begin{cases} uv = \dfrac{8 - \sqrt{194}}{18} \\ u + v = \dfrac{2}{3} \end{cases} (2)$$

Hệ (1) vô nghiệm, còn hệ (2) có các nghiệm là :

$$u_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}} - 3}}{3}$$

Vì $u = \sqrt{z}$ nên $u \geq 0$, vì $u_2 < 0$ nên phương trình đã cho tương đương với phương trình : $\sqrt{z} = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}} - 3}\right)$ mà nghiệm duy nhất là

$z = \frac{1}{9}\left(1 + \sqrt{\sqrt{\frac{97}{2}} - 3}\right)^2$. Đó cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

10. a) Do z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình bậc ba $z^3 + kz + k = 0$ nên ta có : $z_i^3 = -k - kz_i$ (với $i = 1, 2, 3$) (1)

$$z_1z_2z_3 = -k \quad (2)$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = k \quad (3)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad (4)$$

Từ (1), $z_i \neq 0$ với $i = 1, 2, 3$, phương trình đã cho tương đương với :

$$z_1^3z_3 + z_2^3z_1 + z_3^3z_2 = -8z_1z_2z_3$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$(-k - kz_1)z_3 + (-k - kz_2)z_1 + (-k - kz_3)z_2 = -8(-k)$$

Thế thì : $(1 + z_1)z_3 + (1 + z_2)z_1 + (1 + z_3)z_2 = -8$

Từ (3) và (4) ta có :

$$-8 = (z_1 + z_2 + z_3) + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) = 0 + k,$$ suy ra $k = -8$.

Vậy nghiệm của phương trình : $(z + 2)(z^2 - 2z - 4) = z^3 - 8z - 8 = 0$ là : $z_1 = -2$, $z_2 = 1 + \sqrt{5}$, $z_3 = 1 - \sqrt{5}$.

b) Ta có tích : $(t^2 + 3t + 2)(t^2 - 9t + 20) = (t + 1)(t + 2)(t - 4)(t - 5)$

$$= [(t + 1)(t - 4)][(t + 2)(t - 5)] = (t^2 - 3t - 4)(t^2 - 3t - 10)$$

Do đó phương trình đã cho có dạng :

$$(t^2 - 3t + 1)(t^2 - 3t - 4)(t^2 - 3t - 10) = -30 \quad (*)$$

Đặt $t^2 - 3t = s$, ta có phương trình : $(s + 1)(s - 1)(s - 10) = -30$.

Giải ra ta được : $s_1 = 5$, $s_2 = 4 + \sqrt{30}$, $s_3 = 4 - \sqrt{30}$.

Như vậy, phương trình (*), tức cũng là phương trình đã cho tương đương với ba phương trình bậc hai sau :

$t^2 - 3t = 5$ mà nghiệm là $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$;

$$t^2 - 3t = 4 + \sqrt{30} \text{ mà nghiệm là } t_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{25 + 4\sqrt{30}}}{2};$$

$$t^2 - 3t = 4 - \sqrt{30} \text{ mà nghiệm là } t_{5,6} = \frac{3 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{30}}}{2}.$$

- ***Lời bình :*** *Giải thêm phương trình sau :*

$$(m - x)^5 + (x - n)^5 = (m - n)^5 \quad \text{với } m \neq n.$$

Giải : Đặt $m - x = u$, $x - n = v$. Thế thì u và v phải là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} u + v = m - n \\ u^5 + v^5 = (m - n)^5 \end{cases} \quad (*)$$

Ta tính tổng $u^5 + v^5$ như sau :

$$\begin{aligned} u^5 + v^5 &= (u + v)(u^4 - u^3v + u^2v^2 - uv^3 + v^4) \\ &= (u + v)(u^4 + v^4) - uv(u^2 - uv + v^2) \\ &= (u + v)(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) - 2u^2v^2 - uv(u^2 + 2uv + v^2) + 3u^2v^2 \\ &= (u + v)[(u^2 + v^2)^2 + u^2v^2 - uv(u + v)^2] \\ &= (u + v)\{[(u + v)^2 - 2uv]^2 - uv(u + v)^2 + u^2v^2\}. \end{aligned}$$

Kết hợp với $u + v = m - n$, ta có :

$$u^5 + v^5 = (u - v)\{[(m - n)^2 - 2uv]^2 - uv(m - n)^2 + u^2v^2\}$$

Thay giá trị này vào phương trình thứ hai của hệ (*) được :

$$(m - n)^4 = (m - n)^4 - 4(m - n)^2(uv) + 4(uv)^2 - (m - n)^2(uv) + (uv)^2.$$

Từ đó : $5(uv)^2 - 5(m - n)^2uv = 0$

Do đó ta phải giải hai hệ sau :

$$\begin{cases} u + v = m - n \\ uv = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} u + v = m - n \\ uv = (m - n)^2 \end{cases}$$

Hệ thứ hai vô nghiệm. Hệ thứ nhất có hai nghiệm : $(u_1 = 0, v_1 = m - n)$ và $(u_2 = m - n, v_2 = 0)$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x_1 = m$, $x_2 = n$.

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Dùng hằng đẳng thức để giải toán

Thông thường để giải toán hoặc lập những bài toán mới ta hay sử dụng một số công thức trong đó có các hằng đẳng thức. Sau đây là một ví dụ :

- Xét tổng $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Bình phương được : $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}$

Nếu a + b + c = 0 thì $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

hay $\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$, trong đó c = –(a + b).

Thay giá trị của c được :

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\right| \qquad (1)$$

Nếu trong hằng đẳng thức (1) thay a bằng $\frac{1}{a}$ hoặc a và b – $\frac{1}{a}$ và $\frac{1}{b}$ sẽ được hai hằng đẳng thức mới :

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=\left|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}\right| \qquad (2)$$

$$\sqrt{a^2+b^2+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}}=\left|a+b-\frac{ab}{a+b}\right| \qquad (3)$$

- Bây giờ ta áp dụng các hằng đẳng thức trên để giải các bài toán sau :

Bài 1. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{(a+b)^2}+\sqrt{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}}}$.

Theo hằng đẳng thức (1) biểu thức đã cho sẽ có kết quả đúng như

$$\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}\right|.$$

Bài 2. Tính tổng :

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}.$$

Vì $1=\frac{1}{1^2}$ nên áp dụng hằng đẳng thức (1) ta có :

$$S=1+1+\ldots+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+n-\frac{1}{n}=\frac{2n^2+n-2}{2n}.$$

Bài 3. Giải phương trình : $x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=a.$

Cộng 1 vào hai vế và áp dụng hằng đẳng thức (2) được :

$$x^2 + \frac{1}{1^2} + \frac{x^2}{(x.1+1)^2} = a + 1 \quad \text{hay} \quad \left(1 + x - \frac{x}{x+1}\right)^2 = a + 1.$$

Đến đây giải tiếp bằng phương pháp thường dùng.

Bài 4. Tính : $\sqrt{0,47^2 + 0,53^2 + 0,47^2.0,53^2}$.

Biến đổi biểu thức dưới căn rồi áp dụng hằng đẳng thức (3) được :

$$\sqrt{0,47^2 + 0,53^2 + \frac{0,47^2.0,53^2}{(0,47+0,53)^2}} = 0,47 + 0,53 - \frac{0,47.0,53}{0,47+0,53} = \mathbf{0,7509}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng biểu thức : $a^2 + (a-1)^2 + a^2(a-1)^2$ là một số chính phương.

Lại áp dụng hằng đẳng thức (3) ta có :

$$a^2 + (a-1)^2 + a^2(a-1)^2 = a^2 + (1-a)^2 + a^2(1-a)^2$$

$$= a^2 + (1-a)^2 + \frac{a^2(1-a)^2}{[a+(1-a)]^2}$$

$$= \left[a + 1 - a - \frac{a(1-a)}{a+(1-a)}\right]^2 = (a^2 - a + 1)^2.$$

§6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. **Nếu hệ gồm** ***một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai*** **thì cách giải là dùng phương pháp thế**. Ví dụ giải hệ sau :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy rằng hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 - x(x + 1) + 3(x + 1)^2 - 7x - 12(x + 1) + 1 = 0 \end{cases}$$

hay sau khi biến đổi phương trình thứ hai ta được hệ tương đương :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 - 7x - 4 = 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai có nghiệm là $x_1 = -\frac{1}{2}$ và $x_2 = 4$. Do đó hệ đã cho có hai nghiệm là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và (4; 5).

2. **Đối với** ***hệ phương trình đối xứng***, tức là hệ mà khi thay x bởi y và thay y bởi x thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi thì cách giải là :

Đặt $S = x + y$, $P = xy$ và biến đổi mỗi phương trình của hệ thành một phương trình đối với S và P, rồi với mỗi nghiệm (S; P) ta giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm nghiệm (x; y) tương ứng.

Ví dụ giải hệ : $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$

Ta thấy rằng hệ đã cho có thể viết : $\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 4 \\ (x + y) + xy = 2 \end{cases}$

Từ đó có $x + y = 2$ hoặc $x + y = -3$.

Vậy ta phải giải hai hệ sau :

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases}$ mà nghiệm là $x_1 = 2$, $y_1 = 0$ và $x_2 = 0$, $y_2 = 2$;

b) $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 5 \end{cases}$ tức là giải phương trình bậc hai $X^2 - SX + P = 0$ hay $x^2 + 3x + 5 = 0$. Phương trình này vô nghiệm vì $\Delta = -11 < 0$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Giải các hệ sau :

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 13 \\ x = 4 - y \end{cases}$ b) $\begin{cases} z + t = 4 + 2\sqrt{zt} \\ z = 10 - t. \end{cases}$

2. Giải các hệ sau :

a) $\begin{cases} x - y = \dfrac{20}{x + y} - \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (z^2 + t^2)(z - t) = 447 \\ zt(z - t) = 210. \end{cases}$

3. Giải các hệ sau :

a) $\begin{cases} (x^2 + y^2 + xy).\sqrt{x^2 + y^2} = 185 \\ (x^2 + y^2 - xy).\sqrt{x^2 + y^2} = 65 \end{cases}$ b) $\begin{cases} zt - z + t = 7 \\ zt + z - t = 13. \end{cases}$

4. Giải hệ : $\begin{cases} s^2 + 2st - 8t^2 - 6s + 18t - 7 = 0 \\ 2s^2 - 5st - 10t^2 - 3s + 9t + 7 = 0. \end{cases}$

5. Giải các hệ :

a) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ xy = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} z^3 - t^3 = 19(z - t) \\ z^3 + t^3 = 7(z + t). \end{cases}$

6. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hai hệ phương trình sau tương đương :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

7. Giải hệ : $\begin{cases} x\sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2} = x - yz \\ y\sqrt{1 - z^2}.\sqrt{1 - x^2} = y - zx \\ z\sqrt{1 - x^2}.\sqrt{1 - y^2} = z - xy. \end{cases}$

8. Giải hệ : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = 68 \\ x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 = 16. \end{cases}$

9. Giải hệ : $\begin{cases} xyzt + xy + x + y = 131 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t} = \dfrac{77}{60} \\ x + y + z + t = 14 \\ \dfrac{xy}{zt} = \dfrac{3}{10}. \end{cases}$

10. Giải hệ : $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = m^3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = m^2 \\ x + y + z = m. \end{cases}$

11. Cho hệ : $\begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = n \\ x^3 + y^3 = p. \end{cases}$

Hãy khử các ẩn x và y để được hệ thức $m^3 = 3mn - 2p$.

12. Giải hệ : $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ (x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (x^2 + z^2)^2 = 294 \\ \dfrac{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = \dfrac{50}{13}. \end{cases}$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Phương trình thứ nhất có thể viết :

$$(x^2 + 2xy + y^2) = 13 + xy \text{ hay } (x + y)^2 - 13 = xy$$

Từ phương trình thứ hai $x + y = 4$ ta có : $xy = 16 - 13 = 3$.

Vậy ta phải giải hệ : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$

Giải ra được : $x_1 = 3, y_1 = 1$ và $x_2 = 1, y_2 = 3$.

b) Thay giá trị $z = 10 - t$ vào phương trình thứ nhất được

$$10 - 2\sqrt{zt} = 4 \text{ hay } zt = 9.$$

Vậy ta phải giải hệ : $\begin{cases} z + t = 10 \\ zt = 9 \end{cases}$

Giải ra được : $z_1 = 9, t_1 = 1$ và $z_2 = 1, t_2 = 9$.

- ***Lời bình :*** *Giải thêm hệ :* $\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1 \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$

Giải : Nhân phương trình thứ nhất với –1 rồi cộng với phương trình thứ hai được hệ tương đương :

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1 \\ 7y^2 - 9y = -2 \end{cases}$$

Phương trình $7y^2 - 9y = -2$ có nghiệm là $y_1 = \dfrac{2}{7}$ và $y_2 = 1$.

Thay các giá trị này vào phương trình thứ nhất được phương trình $49x^2 - 14x + 5 = 0$ vô nghiệm và phương trình $x^2 - x = 0$ mà nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là (0; 1) và (1; 1).

2. a) Khử mẫu của phương trình thứ nhất được :

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} - 20 = 0.$$

Đặt $x + y = \sqrt{(x + y)^2}$ với $x + y > 0$ ta giải phương trình bậc hai đối với $\sqrt{x^2 - y^2}$ được : $\sqrt{x^2 - y^2} = \dfrac{-1 \pm 9}{2}$

hay $\sqrt{x^2 - y^2} = 4$ (loại giá trị $\sqrt{x^2 - y^2} = -5$).

Như thế hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ \sqrt{x^2 - y^2} = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

Giải ra ta có : $x_1 = 5$, $y_1 = 3$ và $x_2 = 5$, $y_2 = -3$.

b) Ta biết rằng $z^2 + t^2 = (z - t)^2 + 2zt$. Do đó nếu đặt $z - t = u$, $zt = v$ thì hệ đã cho có thể viết :

$$\begin{cases} (u^2 + 2v)u = 447 \\ uv = 210 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u^3 + 420 = 447 \\ uv = 210 \end{cases}$$

Từ đó $u^3 = 27$, $u = 3$ và $v = 70$, tức là $\begin{cases} z - t = 3 \\ zt = 70. \end{cases}$

Thay $z = 3 + t$ vào phương trình thứ hai được $t^2 + 3t - 7 = 0$ mà nghiệm là $t_1 = 7$, $t_2 = -10$. Từ đó tìm được $z_1 = 10$, $z_2 = -7$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $z_1 = 10$, $t_1 = 7$ và $z_2 = -7$, $t_2 = -10$.

- ***Lời bình :*** *Tương tự, có thể giải hệ :* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41^2 \\ xy = 360. \end{cases}$

Giải : Lưu ý, nếu ta thay $y = \dfrac{360}{x}$ vào phương trình thứ nhất sẽ được một phương trình trùng phương. Sau đó thay $x^2 = t$ được phương trình $t^2 - 1681t + 360^2 = 0(*)$ khá phức tạp.

Tuy nhiên nếu tìm biệt thức $\Delta = 1681^2 - 360^2.4$ như sau thì cách giải dễ dàng hơn.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{1681^2 - 360^2.4} = \sqrt{1681^2 - 720^2} = \sqrt{961.2401} = 31.49$$

(nếu tính riêng 1681^2 thì sẽ được số khá lớn 2825461).

Như thế phương trình (*) có nghiệm là $t_{1,2} = \dfrac{1681 \pm 1519}{2}$, tức là $t_1 = 1600$ và $t_2 = 81$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là : $x_1 = \sqrt{1600} = 40,\ y_1 = \dfrac{360}{40} = 9$;

$$x_2 = \sqrt{81} = 9, \quad y_2 = \frac{360}{9} = 40.$$

3. a) Cộng hai phương trình đã cho được :

$$2(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 250;\ (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 125$$

hay $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 5^3$, từ đó $\sqrt{x^2 + y^2} = 5$.

Thay giá trị này vào hệ đã cho được :

$$\begin{cases}(25 + xy).5 = 185\\(25 - xy).5 = 65\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25 + xy = 37\\25 - xy = 13.\end{cases}$$

Như thế $2xy = 24$ hay $xy = 12$.

Bây giờ ta có hệ : $\begin{cases}(x + y)^2 = 49\\xy = 12\end{cases}$ hay $\begin{cases}x + y = \pm 7\\xy = 12.\end{cases}$

Giải hệ : $\begin{cases}x + y = 7\\xy = 12\end{cases}$ được $(x; y) = (3; 4)$ và $(4; 3)$.

Giải hệ : $\begin{cases}x + y = -7\\xy = 12\end{cases}$ được $(x; y) = (-3; -4)$ và $(-4; -3)$.

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm :

$x_1 = 3, y_1 = 4;\ x_2 = 4, y_2 = 3;\ x_3 = -3, y_3 = -4;\ x_4 = -4, y_4 = -3.$

b) Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất được :

$$2(z - t) = 6 \text{ hay } z - t = 3.$$

Hệ đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases}zt - z + t = 7 & (1)\\z - t = 3 & (2)\end{cases}$

Từ (2) có $z = 3 + t$, thay vào (1) được : $(3 + t)t - 3 - t + t = 7$

hay $t^2 + 3t - 10 = 0$ mà nghiệm là $t_1 = 2,\ t_2 = -5$.

Từ đó $z_1 = 3 + t = 5, \quad z_2 = 3 - 5 = -2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là : $(z; t) = (5; 2)$ và $(-2; -5)$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Cho hai phương trình bậc hai $mx^2 + nx + p = 0$ *và* $px^2 + nx + m = 0$.

Tìm hệ thức giữa m, n, p là điều kiện cần và đủ để hai phương trình trên có một nghiệm chung duy nhất.

Giải : Giả sử x_0 là nghiệm chung duy nhất. Thay $x = x_0$ vào hai phương trình rồi trừ từng vế được : $(m - p)(x_0^2 - 1) = 0$.

Nếu $m \neq p$ thì $m \pm n + p = 0$, suy ra : $|n| = |m + p|$.

Nếu $m = p$ thì hai phương trình đồng nhất và có nghiệm kép, tức là :

$$n^2 = 4mp = 4m^2; \qquad |n| = |2m| = |m + p|.$$

Đảo lại, với $|n| = |m + p|$ thì hai phương trình có nghiệm chung duy nhất. Vậy điều kiện cần tìm là $|n| = |m + p|$.

4. Nhân phương trình thứ nhất với 2 rồi trừ đi phương trình thứ hai được hệ : $\begin{cases} 3st - 2t^2 - 3s + 9t - 7 = 0 \\ s^2 + 2st - 8t^2 - 6s + 18t - 7 = 0. \end{cases}$

Với $t \neq 1$, phương trình thứ nhất của hệ này cho $s = \dfrac{2t^2 - 9t + 7}{3(t - 1)}$. Thay giá trị này vào phương trình thứ hai được phương trình :

$$\frac{t^4 - 3t^3 + t^2 + 3t - 2}{t - 1} = 0, \text{ mà nghiệm là } t_1 = -1,\ t_2 = 2.$$

Với $t_1 = -1$ và $t_2 = 2$, ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là

$$(s; t) = (-3; -1) \text{ và } (-1; 2).$$

Với $t = 1$, cả hai phương trình của hệ đã cho có dạng $s^2 - 4s + 3 = 0$, do đó hệ còn có thêm hai nghiệm nữa là $(s; t) = (3; 1)$ và $(1; 1)$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm là $(s; t) = (-3; -1) = (-1; 2) = (3; 1)$ và $(1; 1)$.

- ***Lời bình :*** *Nếu hệ đã cho là* $\begin{cases} s^3 + 4t = t^3 + 16s \\ 1 + t^2 = 5(1 + s^2) \end{cases}$ *thì cách giải như sau :*

Hệ đã cho có thể viết dưới dạng : $\begin{cases} s^3 - 16s = t^3 - 4t \\ 5s^2 = t^2 - 4. \end{cases}$

Nếu $s \neq 0$, chia từng vế hai phương trình được $\dfrac{s^3 - 16s}{5s^2} = \dfrac{t^3 - 4t}{t^2 - 4}$ là hệ quả (với $s \neq 0$) của hệ đã cho. Từ phương trình này ta có $t = \dfrac{s^2 - 10}{5s}$.

Thay giá trị của t vào phương trình thứ hai của hệ đã cho được :

$$5s^2 = \frac{(s^2 - 16)^2}{25s^2} - 4, \text{ tức là } 124s^4 + 132s^2 - 256 = 0, \text{ từ đó } s^2 = 1,$$

vậy $s_1 = 1$, $s_2 = -1$ và hai giá trị của t tương ứng là $t_1 = -3$, $t_2 = 3$.

Nếu s = 0 thì từ phương trình thứ hai của hệ ta có $t^2 = 4$, vậy $t = \pm 2$. Do khi giải xuất hiện phương trình hệ quả nên phải thử lại các nghiệm tìm được.

Sau khi thử lại, ta thấy rằng hệ đã cho có bốn nghiệm sau :

$$(s; t) = (-1; 3) = (1; -3) = (0; 2) = (0; -2).$$

5. a) Lập phương phương trình thứ hai được hệ tương đương :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6 \\ x^3y^3 = 8 \end{cases} \quad \text{Từ đó có : } \begin{cases} x^3 = 2 \\ y^3 = 4 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x^3 = 4 \\ y^3 = 2. \end{cases}$$

Giải ra được hai nghiệm : $\left(x_1 = \sqrt[3]{2},\ y_1 = \sqrt[3]{4}\right)$ và $\left(x_2 = \sqrt[3]{4},\ y_2 = \sqrt[3]{2}\right)$.

b) Hệ đã cho có thể viết : $\begin{cases} (z - t)(z^2 + zt + t^2 - 19) = 0 \\ (z + t)(z^2 - zt + t^2 - 7) = 0 \end{cases}$

Nếu $z - t = 0$ thì $z = t$; Nếu $z + t = 0$ thì $t = -z$.

Ngoài ra : $\begin{cases} z^2 + zt + t^2 = 19 \\ z^2 - zt + t^2 = 7 \end{cases}$ (*)

- Nếu z = t, thì từ phương trình thứ hai ta có : $2z^3 - 14z = 0$ mà nghiệm là $z_1 = 0$, $t_1 = 0$ và $z_{2,3} = \pm\sqrt{7}$, $t_{2,3} = \pm\sqrt{7}$.
- Nếu t = –z, thì từ phương trình thứ nhất ta có : $2z^3 - 38z = 0$. Từ đó $z_{4,5} = \pm\sqrt{19}$, $t_{4,5} = \mp\sqrt{19}$.

Từ hệ (*) ta được hệ sau : $\begin{cases} z^2 + t^2 = 13 \\ zt = 6. \end{cases}$ Giải hệ này được thêm bốn nghiệm : $z_{6,7} = \pm 3$, $t_{6,7} = \pm 2$ và $z_{8,9} = \pm 2$, $t_{8,9} = \pm 3$.

Tóm lại, hệ đã cho có các nghiệm sau :

$z_1 = 0, t_1 = 0;$ $\quad z_{2,3} = t_{2,3} = \pm\sqrt{7}\,;$ $\quad z_{4,5} = \pm\sqrt{19}\,,\ t_{4,5} = \mp\sqrt{19}\,;$

$z_{6,7} = \pm 3,\ t_{6,7} = \pm 2;$ $\quad z_{8,9} = \pm 2,\ t_{8,9} = \pm 3.$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải hệ sau :* $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$

Giải : Đây là một hệ đối xứng. Ta đặt $u = x + y$, $v = xy$.

Như thế $(x + y)^3 = u^3$, từ đó : $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv$

Vậy ta được hệ : $\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17 \\ u + v = 0 \end{cases}$

Giải ra được : $u_1 = \sqrt{\dfrac{17}{3}}$, $v_1 = -\sqrt{\dfrac{17}{3}}$ và $u_2 = -\sqrt{\dfrac{17}{3}}$, $v_2 = \sqrt{\dfrac{17}{3}}$.

Vậy hệ đã cho tương đương với hai hệ :

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{\dfrac{17}{3}} \\ xy = -\sqrt{\dfrac{17}{3}} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x + y = -\sqrt{\dfrac{17}{3}} \\ xy = \sqrt{\dfrac{17}{3}} \end{cases}$$

Hệ thứ hai này vô nghiệm, còn hệ thứ nhất có nghiệm là :

$$\left(\frac{\sqrt{51} + \sqrt{12\sqrt{51} + 51}}{6}; \frac{\sqrt{51} - \sqrt{12\sqrt{51} + 51}}{6}\right)$$

$$\text{và} \left(\frac{\sqrt{51} - \sqrt{12\sqrt{51} + 51}}{6}; \frac{\sqrt{51} + \sqrt{12\sqrt{51} + 51}}{6}\right).$$

6. Với $a = -2$, thì hệ thứ nhất vô nghiệm vì $x + 2y = 4$ và $x + 2y = 6$; còn hệ thứ hai lại có dạng $y^2 + 2\left(x - \dfrac{11}{4}\right)^2 + \dfrac{71}{8} = 0$ cũng vô nghiệm, nên hai hệ đã cho tương đương.

Với $a \neq -2$, thì hệ thứ nhất có nghiệm duy nhất, hệ thứ hai có thể có nghiệm duy nhất nhưng chỉ với $y = 0$ (vì ở cả hai phương trình có y ở lũy thừa chẵn).

Do đó hai hệ chỉ có thể tương đương khi hệ $\begin{cases} x = 2 - a \\ -x = a - 2a^2 \end{cases}$ có nghiệm, tức là khi $(a + 1)(a - 1) = 0$ hay khi $a = \pm 1$.

Nếu $a = -1$, thì nghiệm $(3; 0)$ của hệ thứ nhất là nghiệm duy nhất của hệ thứ hai, dẫn tới dạng : $\begin{cases} (x - 1)(x - 3) = y^4 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Nếu $a = 1$, thì hệ thứ hai có ít nhất hai nghiệm $(1; 0)$ và $(3; 0)$, do đó không tương đương với hệ thứ nhất.

Vậy muốn hai hệ phương trình đã cho là tương đương thì $a = -2$ hoặc $a = -1$.

- ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán sau :

Tìm hệ thức giữa các hệ số a, b, c để hệ sau đây có nghiệm :

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ bx^2 + cx + a = 0 \\ cx^2 + ax + b = 0. \end{cases}$$

Giải : Cộng các phương trình đã cho được phương trình :

$$(a + b + c)x^2 + (a + b + c)x + (a + b + c) = 0$$

Từ đó : $(a + b + c)(x^2 + x + 1) = 0$.

Nếu $a + b + c \neq 0$ thì vô nghiệm vì $x^2 + x + 1 \neq 0$ với mọi x. Như vậy muốn hệ có nghiệm thì phải có điều kiện cần $a + b + c = 0$. Ta chứng minh đó cũng là điều kiện đủ. Thật thế nếu $a + b + c = 0$ thì $x = 1$, rõ ràng là nghiệm của hệ đã cho.

7. Trước tiên ta giả sử rằng x, y, z đều khác 0 và khác ±1. Từ phương trình thứ nhất ta có $x = \dfrac{yz}{1 - \sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2}}$. Từ phương trình thứ hai và thứ ba suy ra $1 - \dfrac{zx}{y} > 0,\ 1 - \dfrac{xy}{z} > 0$ nên

$$\frac{z^2}{1 - \sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2}} < 1; \qquad \frac{y^2}{1 - \sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2}} < 1$$

hay $z^2 < 1 - \sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2}$; $y^2 < 1 - \sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2}$;

$\sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2} < 1 - z^2$; $\sqrt{1 - y^2}.\sqrt{1 - z^2} < 1 - y^2$.

Từ đó : $\sqrt{1 - y^2} < \sqrt{1 - z^2}$; $\sqrt{1 - z^2} < \sqrt{1 - y^2}$ (mâu thuẫn !).

Nếu $x = 0$ thì $yz = 0$, ta được nghiệm $(0; 0; a)$ và $(0; a; 0)$ trong đó $|a| < 1$ và tương tự được nghiệm dạng $(a; 0; 0)$.

Nếu $x = 1$ thì $y = z$ và mọi bộ ba dạng $(1; a; a)$ trong đó $|a| \leq 1$ là nghiệm; tương tự được nghiệm dạng $(a; 1; a)$ và $(a; a; 1)$.

Nếu $x = -1$ thì $y = -z$ và mọi bộ ba dạng $(-1; a; -a)$ trong đó $|a| \leq 1$ là nghiệm; tương tự được nghiệm dạng $(a; -1; -a)$ và $(a; -a; -1)$.

- ***Lời bình :*** *Có thể giải thêm hệ sau :* $\begin{cases} x(x + y + z) = m - yz \\ y(x + y + z) = n - xz \\ z(x + y + z) = p - xy. \end{cases}$

Giải : Ta có thể viết hệ đã cho như sau :

$$(x + z)(x + y) = m$$
$$(y + z)(y + x) = n$$
$$(z + x)(z + y) = p$$

Nhân các phương trình này rồi khai căn bậc hai của hai vế được :

$$(x + z)(x + y)(y + z) = \pm\sqrt{mnp}$$

Từ đó : $y + z = \pm\dfrac{\sqrt{mnp}}{m}$, $\quad x + z = \dfrac{\sqrt{mnp}}{n}$, $\quad x + y = \dfrac{\sqrt{mnp}}{p}$

Cộng từng vế ba đẳng thức này được : $x + y + z = \pm\dfrac{\sqrt{mnp}}{2}\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\right)$

Nhưng do $y + z = \pm\dfrac{\sqrt{mnp}}{m}$ nên $x = \pm\dfrac{\sqrt{mnp}}{2}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{m}\right)$

Tương tự, ta tìm được :

$$y = \pm\frac{\sqrt{mnp}}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) \quad \text{và} \quad z = \pm\frac{\sqrt{mnp}}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right).$$

8. Từ phương trình thứ ba ta có :

$y^2x + z^2x + z^2y + x^2y + x^2z - 6xyz = 16$ hay

$x(xy + xz + yz) + y(xy + xz + yz) + z(xy + xz + yz) - 9xyz = 16;$

$(xy + xz + yz)(x + y + z) - 9xyz = 16$ (1)

Từ hai phương trình thứ nhất và thứ hai ta có :

$-6(xy + xz + yz) = 66$ hay $xy + xz + yz = -11$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $(-11).1 - 9xyz = 16$ hay $xyz = -3$ (3)

Như vậy ta được hệ tương đương : $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + xz + yz = -11 \\ xyz = -3 \end{cases}$

Kết hợp với phương trình thứ hai được :

$$t^3 - t^2 - 11t + 3 = 0 \quad \text{hay} \quad (t + 3)(t^2 - 4t + 1) = 0.$$

Cuối cùng hệ đã cho có 6 nghiệm là :

$$\begin{aligned}(x; y; z) &= (-3; 2\sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}) = (-3; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3}; -3; 2 - \sqrt{3}) \\ &= (2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; -3) = (2 - \sqrt{3}; -3; 2 + \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}; -3).\end{aligned}$$

- ***Lời bình :*** *Có thể giải thêm hệ sau :*

$$\begin{cases} \dfrac{x + y}{xy} = \dfrac{7}{12} \\ \dfrac{z + t}{zt} = \dfrac{5}{18} \\ x + y + z + t = 22 \\ xyzt = 648. \end{cases}$$

Giải : Nhân hai phương trình đầu ta có : $\dfrac{(x + y)(z + t)}{xyzt} = \dfrac{7.5}{12.18}$

Kết hợp với phương trình thứ tư được : $(x + y)(z + t) = 105.$

Coi $(x + y)$ và $(z + t)$ là nghiệm của phương trình bậc hai với tổng của chúng (phương trình thứ ba) và tích vừa tìm được, ta lập được phương trình : $u^2 - 22u + 105 = 0$ mà nghiệm là $u_1 = 7$, $u_2 = 15$.

Vậy hoặc $x + y = 7$, $z + t = 15$ hoặc $x + y = 15$, $z + t = 7$.

Kết hợp với hai phương trình đầu ta có : $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases}$ và $\begin{cases} z + t = 15 \\ zt = 54 \end{cases}$

Giải hai hệ này sẽ được nghiệm của hệ đã cho là :

$(x; y; z; t) = (3; 4; 6; 9) = (3; 4; 9; 6) = (4; 3; 6; 9) = \text{v.v...}$

9. Phương trình thứ nhất có thể viết : $xy(zt + 1) + (x + y) = 131$.

Từ phương trình thứ tư suy ra : $zt = \dfrac{10xy}{3}$.

Từ đó được : $\dfrac{xy(10xy + 3)}{3} + (x + y) = 131$,

hay nếu đặt $xy = b$, $x + y = a$: $\quad 10b^2 + 3b + (3a - 393) = 0 \qquad (1)$

Từ phương trình thứ hai suy ra : $\dfrac{x + y}{xy} + \dfrac{z + t}{zt} = \dfrac{77}{60}$

Từ phương trình thứ ba có : $x + t = 14 - (x + y)$

Từ đó được : $\dfrac{x + y}{xy} + \dfrac{14 - (x + y)}{\dfrac{10xy}{3}} = \dfrac{77}{60}$

$$\text{hay} \quad \frac{a}{b} + \frac{42 - 3a}{10b} = \frac{77}{60}, \quad \text{suy ra : } 3a = \frac{11b - 36}{2} \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) được : $20b^2 + 17b - 822 = 0$ mà nghiệm là :

$$b_1 = 6,\ b_2 = -\frac{137}{20}.$$

Thay vào (2) được : $a_1 = 5$, $a_2 = -\dfrac{2227}{120}$.

Vậy ta phải giải hai hệ :

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ được $x = 2$, $y = 3$ và $x = 3$, $y = 2$.

Từ đó tìm được : $zt = \dfrac{10xy}{3} = 20$, $z + t = 9$. Giải phương trình bậc hai $X^2 - 9X + 20 = 0$ được nghiệm là $z = 4$, $t = 5$ và $z = 5$, $t = 4$.

b) $\begin{cases} x + y = -\dfrac{2227}{120} \\ xy = -\dfrac{137}{20} \end{cases}$

Từ đó tìm được $zt = \frac{10xy}{3} = -\frac{137}{6}$, $z + t = 14 - (x + y) = \frac{3907}{120}$.

Cuối cùng giải ra ta tìm được $(z; t) = \frac{3907 \pm \sqrt{16579849}}{240}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải hệ :* $\begin{cases} xt = yz & (1) \\ x + y + z + t = 1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 9 & (3) \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 49 & (4) \end{cases}$

Giải : Đặt $x + y = \alpha$, $y + z = \beta$, $xt = yz = \gamma$, ta có :

Từ (2) : $\alpha + \beta = 1$ (5)

Từ (3) : $\alpha^2 + \beta^2 = 9 + 4\gamma$ (6)

Từ (4) : $\alpha^4 + \beta^4 = 12\gamma^2 + 36\gamma + 49$ (7)

Từ (6) : $\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = 81 + 72\gamma + 16\gamma^2$

hay $4\gamma^2 + 36\gamma + 32 = 2\alpha^2\beta^2$; $\alpha^2\beta^2 = 2\gamma^2 + 18\gamma + 16$ (8)

Từ (5) : $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 1$ hay $\alpha\beta = -2\gamma - 4$; $\alpha^2\beta^2 = 4\gamma^2 + 16 + 16\gamma$ (9)

Do đó từ (8) và (9) được : $2\gamma^2 + 18\gamma + 16 = 4\gamma^2 + 16 + 16\gamma$,

tức là $2\gamma^2 - 2\gamma = 0$, $\gamma(\gamma - 1) = 0$ mà nghiệm là $\gamma = 0$ và $\gamma = 1$.

Nếu $\gamma = 0$ thì $\alpha\beta = -2\gamma - 4 = -4$. Giải hệ $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -4 \end{cases}$ được $\alpha, \beta = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Nếu $\gamma = 1$ thì $\alpha\beta = -2\gamma - 4 = -6$. Giải hệ $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -6 \end{cases}$ được $\alpha, \beta = 3; -2$.

Cuối cùng ta có :

a) $\begin{cases} x + t = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ xt = 0 \end{cases}$

Giải ra được $x; t = 0; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ và $y; z = 0; \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

b) $\begin{cases} x + t = 3; -2 \\ xt = 1 \end{cases}$

Giải ra được $x; t = -1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ và $y; z = -1; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

10. Hệ đã cho là hệ đối xứng với ba ẩn x, y, z.

Ta đặt $u = x + y + z$, $v = xy + yz + zx$, $w = xyz$.

Dựa vào hai hằng đẳng thức :

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx)$$

và $$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3(x + y + z)(xy + yz + zx) - 6xyz,$$

ta có hệ : $$\begin{cases} u = m \\ u^2 - 2v = m^2 \\ u^3 - 3uv + 6w = m^3. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu của hệ này ta tìm được $u = m$, $v = 0$, rồi từ phương trình thứ ba được $w = 0$. Do đó hệ này tương đương với hệ :

$$\begin{cases} u = m \\ v = 0 \\ w = 0. \end{cases}$$

Chuyển sang các ẩn x, y, z ta được nghiệm của hệ đã cho là :

$$(x; y; z) = (0; 0; m) = (0; m; 0) = (m; 0; 0).$$

* *Bị chú* : Có thể giải theo cách khác như sau :

Từ hai phương trình thứ hai và thứ ba của hệ đã cho và từ hằng đẳng thức thứ nhất ở trên ta được : $xy + yz + zx = 0$.

Rồi từ hằng đẳng thức thứ hai ta có $xyz = 0$. Từ đó giải ra ta cũng được nghiệm như đã tìm.

- ***Lời bình :***

1. *Đặc biệt nếu m = 1* ta sẽ được hệ : $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1, \end{cases}$ mà cách giải gọn như sau :

   Ta có : $(x + y + z)^3 = 1$ hay $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 1$.

   Như thế $(x + y + z)^3 + 2(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

   Sau khi biến đổi đơn giản ta có ngay $xyz = 0$.

   Từ đó, nếu $x = 0$ thì $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, v.v...

   Vậy đáp số là : $(x; y; z) = (0; 0; 1) = (0; 1; 0) = (1; 0; 0)$.

2. *Có thể giải thêm hệ :* $\begin{cases} xy + yz = 18 \\ xz + zy = 20 \\ yx + xz = 3. \end{cases}$

Giải : Cộng cả ba phương trình được : $xy + xz + yz = 23$

Do đó hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 23 \\ xy + yz = 18 \\ xz + zy = 20 \\ yx + xz = 8. \end{cases}$$

Lấy phương trình thứ nhất lần lượt trừ đi các phương trình thứ hai, thứ ba và thứ tư sẽ được : $xz = 5$, $xy = 3$, $yz = 15$. Vậy hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} xy = 3 \\ xz = 5 \\ yz = 15 \\ xy + yz = 18 \\ xz + zy = 20 \\ yx + xz = 8, \end{cases}$$

trong đó ba phương trình cuối là hệ quả của hệ $\begin{cases} xy = 3 \\ xz = 5 \\ yz = 15. \end{cases}$

Như vậy, hệ đã cho tương đương với hệ cuối này với phương trình thứ tư thêm vào $(xyz)^2 = 225$ (*)

Thay $xy = 3$ vào (*) được $z^2 = 25$, rồi tương tự được $xz = 5$ và $yz = 15$. Cuối cùng ta sẽ được hệ sau đây tương đương với hệ đã cho :

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ z^2 = 25 \\ xz = 5 \\ xy = 3 \\ yz = 15. \end{cases}$$

Giải ra được nghiệm của hệ đã cho là các bộ ba số :

$(x; y; z) = (1; 3; 5)$ và $(-1; -3; -5)$.

11. Ta có : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

$$= x^3 + y^3 + \frac{3}{2}(x + y)\left[(x + y)^2 - (x^2 + y^2)\right]$$

Như thế : $(x + y)^3 = 3(x + y)(x^2 + y^2) - 2(x^3 + y^3)$.

Nhưng $x + y = m$, $x^2 + y^2 = n$, $x^3 + y^3 = p$, nên cuối cùng khử các ẩn x, y, z ta suy ra hệ thức $m^3 = 3mn - 2p$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *hãy khử m, n, p từ hệ :*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n} = \dfrac{z}{p} \\ m^2 + n^2 + p^2 = 1 \\ m + n + p = 1, \end{cases}$$

để tìm ra một hệ thức giữa x, y, z không chứa m, n, p nữa.

Giải : Đặt $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{1}{k}$, ta có : $m = kx,\ n = ky,\ p = kz$ (*)

Mặt khác : $(m + n + p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2mn + 2mp + 2np$

Vì $m + n + p = 1$ và $m^2 + n^2 + p^2 = 1$ nên từ đẳng thức cuối này ta có

$$mn + mp + np = 0.$$

Kết hợp với (*) ta được hệ thức sau : $xy + xz + yz = 0$.

12. Để cho gọn ta đặt : $x^2 + y^2 = u,\quad x^2 + z^2 = v,\quad y^2 + z^2 = t$

Hệ đã cho trở thành : $\begin{cases} u + v + t = 28 \\ u^2 + v^2 + t^2 = 294 \\ \dfrac{uv}{t} = \dfrac{50}{13}. \end{cases}$

Từ đó ta có : $u + v = 28 - t,\quad uv = \frac{50}{13}t,\quad (u + v)^2 - 2uv + t^2 = 294$

hay $(28 - t)^2 - \frac{100}{13}t + t^2 - 294 = 0$. Giải ra được $t = 13$.

Biết giá trị của t ta tìm được giá trị của $u = 10$ và $v = 15$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là : $x_{1,2} = \pm 1,\quad y_{1,2} = \pm 3,\quad z_{1,2} = \pm 2;$

$x_{3,4} = \pm 1,\quad y_{3,4} = \pm 2,\quad z_{3,4} = \pm 3.$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải hệ sau :* $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 18 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4. \end{cases}$

Giải : Bình phương phương trình thứ nhất rồi trừ đi phương trình thứ hai được : $xy + xz + yz = 9$ (1)

Bình phương phương trình thứ ba rồi trừ đi phương trình thứ nhất được : $\sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} = 5$ (2)

Bình phương phương trình cuối này rồi trừ đi phương trình (1) được :

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}).\sqrt{xyz} = 8$$

Kết hợp với phương trình thứ ba của hệ đã cho được $\sqrt{xyz} = 2$, $xyz = 4$.

Vậy ta phải giải hệ sau : $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 9 \\ xyz = 4 \end{cases}$

Giải hệ này sẽ được nghiệm của hệ đã cho là :

$$(x; y; z) = (1; 1; 4) = (1; 4; 1) = \text{v.v...}$$

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Vận dụng phương pháp quy nạp toán học để tính tổng

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng :*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (\text{với } x \neq 1).$$

Giải : $S_1 = 1 + x = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, vậy với n = 1 công thức đúng.

Giả sử nó đúng với n = k, tức là :

$S_k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$, ta chứng minh nó đúng với n = k + 1, tức là :

$$S_{k+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}.$$

Thật vậy, $S_{k+1} = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \dfrac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$.

Theo nguyên lí quy nạp toán học, công thức này đúng với mọi n.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng :*

$$3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ chữ số } 3} = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}.$$

Giải : $S_1 = 3$. Mặt khác với n = 1 thì $\dfrac{10^{1+1} - 9 - 10}{27} = 3$.

Vậy $S_1 = \dfrac{10^{1+1} - 9 - 10}{27}$, tức là với n = 1, công thức đúng.

Giả sử $S_k = 3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{333\ldots3}_{k \text{ chữ số } 3} = \dfrac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$, ta chứng minh rằng :

$$S_{k+1} = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_{\text{k chữ số 3}} + \underbrace{333\dots33}_{\text{(k+1) chữ số 3}}$$

$$= \frac{10^{k+2} - 9(k+1) - 10}{27}.$$

Thật vậy, $S_{k+1} = S_k + \underbrace{333\dots33}_{\text{(k+1) chữ số 3}}$

$$= S_k + 3.10^k + 3.10^{k-1} + \dots + 3.10^2 + 3.10 + 3$$

$$= S_k + 3(1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^k)$$

Nhưng theo giả thiết quy nạp thì $S_k = \dfrac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}$ và theo công thức ở ví dụ 1, thì $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^k = \dfrac{10^{k+1} - 1}{10 - 1}$.

Vậy $S_{k+1} = \dfrac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 3.\dfrac{10^{k+1} - 1}{9} = \dfrac{10.10^{k+1} - (9k+9) - 10}{27}$

$= \dfrac{10^{k+2} - 9(k+1) - 10}{27}$. Do đó công thức đúng với mọi n.

Ví dụ 3.

1. *Chứng minh công thức* $\left[\dfrac{n}{2}\right] + \left[\dfrac{n+1}{2}\right] = n$ *đúng với mọi n, trong đó [x] là phần nguyên của x.*

Thật vậy, nếu n = 2m thì :

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2m}{2}\right] + \left[\frac{2m+1}{2}\right] = [m] + \left[m + \frac{1}{2}\right] = n$$

Nếu n = 2m + 1 thì :

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2m+1}{2}\right] + \left[\frac{2m+2}{2}\right] = m + m + 1 = 2m + 1 = n.$$

2. *Tính tổng* $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1}.n$.

Giải : Xét $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$, ta có :

$$S_1 = 1,\quad S_2 = -1,\quad S_3 = 2,\quad S_4 = -2,\quad S_5 = 3,\quad S_6 = -3.$$

Ta được dãy số 1, –1, 2, –2, 3, –3. Nhưng :

$$1 = \left[\frac{1+1}{2}\right] = \left[\frac{2+1}{2}\right];\quad 2 = \left[\frac{3+1}{2}\right] = \left[\frac{4+1}{2}\right];\quad 3 = \left[\frac{5+1}{2}\right] = \left[\frac{6+1}{2}\right]$$

Từ đó ta có thể cho rằng : $S_n = (-1)^{n-1}\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ (*)

Ta chứng minh công thức này bằng quy nạp.

Ta đã thấy rằng công thức đúng với n = 1 (cả với n = 2, 3, 4, 5, 6).

Giả sử $S_k = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{k-1}.k = (-1)^{k-1}\left[\frac{k+1}{2}\right]$

Bây giờ ta chứng minh rằng :

$$S_{k+1} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + (-1)^{k-1} + (-1)^k(k+1) = (-1)^k\left[\frac{k+2}{2}\right]$$

Ta có : $S_{k+1} = (-1)^{k-1}\left[\frac{k+1}{2}\right] + (-1)^k(k+1) = (-1)^k\left(k + 1 - \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)$

Nhưng từ công thức $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] = n$ ở trên, suy ra

$$\left[\frac{k+1}{2}\right] + \left[\frac{k+2}{2}\right] = k + 1, \text{ từ đó } k + 1 - \left[\frac{k+1}{2}\right] = \left[\frac{k+2}{2}\right].$$

Vậy $S_{k+1} = (-1)^k\left[\frac{k+2}{2}\right]$. Do đó công thức (*) đúng với mọi n.

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng :*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

với mọi n tự nhiên.

Giải : Với n = 1 ta có vế trái bằng $1 - \frac{1}{2}$, vế phải $-\frac{1}{1+1}$.

Vì $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ nên với n = 1 hằng đẳng thức trên đúng.

Giả sử $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k}$,

ta chứng minh rằng :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2}$$

Thật vậy : $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} =$

$$= \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Vậy hằng đẳng thức đã cho đúng với mọi n.

§7. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Khái niệm về bất đẳng thức

$a > b$ tương đương với $a - b > 0$;

$a < b$ tương đương với $a - b < 0$.

2. Tính chất của bất đẳng thức

a) Nếu $a > b$ thì $b < a$ và ngược lại.

Nếu $a > b$ thì $-a < -b$ và ngược lại.

b) Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.

c) Nếu $a > b$ thì $a + c > b + c$ và ngược lại.

d) Nếu $a > b$ và $c > d$ thì $a + c > b + d$, còn $c < d$ thì $a - c > b - d$.

e) Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$, còn $c < 0$ thì $ac < bc$, và ngược lại.

f) Nếu $a > b > 0$ và $n > 0$ thì $a^n > b^n$, còn $n < 0$ thì $a^n < b^n$.

g) Nếu $a > b > 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$; Nếu $a > b$ thì $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$.

h) Với a, b tùy ý thì $|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$.

3. Bất đẳng thức Côsi

Cho $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số không âm thì :

$\dfrac{a_1 + a_2}{2} \ge \sqrt{a_1a_2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2$;

$\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \ge \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3$;

Tổng quát : $\dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

4. Bất đẳng thức Bunhiacôpski

Cho 2n số tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta luôn có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Tổng quát :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $b = ka_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Tồn tại hay không bất đẳng thức $x + y < z$ nếu $z < 0$ và $x^3 + y^3 + 3xyz < 0$?

2. Chứng minh rằng với mọi m, n, p dương ta có :

$$m^3 + n^3 + p^3 - m^2n - mn^2 - n^2p - np^2 - p^2m - pm^2 + 3mnp \geq 0.$$

3. Chứng minh : $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2.$

4. Cho $t_i > 0$ ($i = 1, 2, ..., n$) và $t_1t_2...t_n = 1$. Chứng minh :

$$(1 + t_1)(1 + t_2)...(1 + t_n) \geq 2^n.$$

5. Chứng minh với a, b, c, d, e, f > 0 ta có :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geq 3.$$

6. Chứng minh rằng nếu m, n, p nguyên dương thì :

$$m^{\frac{m}{m+n+p}}.n^{\frac{n}{m+n+p}}.p^{\frac{p}{m+n+p}} \geq \frac{1}{3}(m + n + p).$$

7. Chứng minh rằng nếu $ad - bc = 1$ thì :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}.$$

8. Chứng minh rằng nếu $m + n = 2$ thì $m^4 + n^4 \geq 2$.

9. Chứng minh với n tự nhiên lớn hơn 1 thì : $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = (m - 5)(m - 1)(m - 6)(m - 2) + 9.$$

11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \quad \text{với } a, b, c, d > 0.$$

12. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$B = b^2.\sqrt{m^2 - b^2}$, trong đó B là một hàm số của b.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Với $z > 0$ và $x^3 + y^3 + 3xyz < 0$ (1) ta chia hai vế của (1) cho số dương z^3 và đặt $\frac{x}{z} = u$, $\frac{y}{z} = v$, được bất đẳng thức :

$$u^3 + v^3 + 3uv < 0 \qquad (2)$$

hay $(u + v)^3 - 3uv(u + v - 1) < 0$ (3)

Giả sử $u + v \geq 1$, nếu u và v trái dấu thì vế trái của (3) dương, nếu u và v cùng dấu thì từ $u + v \geq 1$ suy ra u và v dương, trái với (2). Vậy ta phải có : $u + v < 1$, tức là $x + y < z$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *cho x, y, z với $x + y - z$, $x + z - y$, $y + z - x$ dương.*

Chứng minh rằng : $xyz \geq (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$.

Giải : Ta có : $x^2 \geq x^2 - (y - z)^2$, $y^2 \geq y^2 - (z - x)^2$, $z^2 \geq z^2 - (x - y)^2$.

Nhân ba bất đẳng thức này được :

$$x^2y^2z^2 \geq (x + y - z)^2 (x + z - y)^2 (y + z - x)^2.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

2. Bất đẳng thức đã cho có thể viết dưới dạng :

$$mnp \geq (m + n - p)(n + p - m)(p + m - n)$$

Nếu tất cả hạng tử của vế phải đều không âm thì bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức Côsi : với $x = m + n - p$, $y = n + p - m$, $z = p + m - n$, ta có :

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 2\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{zx} = 8xyz$$

Trong khi đó chỉ một trong các hạng tử của vế phải có thể là âm : Chẳng hạn, nếu $m \leq n \leq p$ thì $n + p > m$, $p + m > n$ và trong trường hợp này vế phải của bất đẳng thức là âm, còn vế trái dương.

Bất đẳng thức đã cho đã được chứng minh.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh bất đẳng thức :*

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x(xy^2 - x + z + 1) \geq 0.$$

Giải : Ta có : $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$, $x^2 + 1 \geq 2x$.

Cộng ba bất đẳng thức này được :

$$x^4 + y^4 + 2x^2 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 + z + 1)$$

hay $x^4 + y^4 + z^2 + 1 - 2x(xy^2 - x + z + 1) \geq 0.$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi : a) $x = y = z = 1$

b) $x = y = 1, y = -1$.

3. Trước tiên ta giả sử rằng các số a, b, c dương và gọi T là tổng của chúng. Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} \leq \frac{\frac{b+c}{a}+1}{2} = \frac{T}{2a}, \text{ tức là } \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{T}.$$

Vậy $$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2a}{T} + \frac{2b}{T} + \frac{2c}{T} = 2$$

Dấu "=" có thể chỉ xảy ra khi $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c} = 1$, không thể được !

Nếu một trong các số, chẳng hạn a = 0, thì bất đẳng thức đã cho có dạng $\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} \geq 2$, do đó thỏa mãn. Nếu tất cả ba số a, b, c đều khác 0 và một trong chúng, chẳng hạn a âm, thì hai số còn lại b và c không thể dương : từ b + c > 0 suy ra a > 0.

Nói cách khác, tất cả ba số phải âm và do bất đẳng thức không đổi khi ta đồng thời thay dấu các số a, b, c nên trong trường hợp này bất đẳng thức đã cho theo chứng minh là đúng.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh bất đẳng thức :*

$$\sqrt{t_1t_2} + \sqrt{t_2t_3} + \ldots + \sqrt{t_{n-1}t_n} \leq \frac{n-1}{2}(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)$$

với $t_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Giải : Theo bất đẳng thức Côsi ta có thể viết :

$$\sqrt{t_1t_2} \leq \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \sqrt{t_2t_3} \leq \frac{t_2 + t_3}{2}, \quad \ldots, \quad \sqrt{t_{n-1}t_n} \leq \frac{t_{n-1} + t_n}{2}.$$

Cộng tất cả bất đẳng thức này ta sẽ được bất đẳng thức cần chứng minh.

4. Ta có : $\frac{1+t_1}{2} \geq \sqrt{t_1}$, $\frac{1+t_2}{2} \geq \sqrt{t_2}$, ..., $\frac{1+t_n}{2} \geq \sqrt{t_n}$.

Nhân tất cả bất đẳng thức này được :

$$\frac{(1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n)}{2^n} \geq \sqrt{t_1t_2\ldots t_n} = 1$$

Từ đó ta có ngay bất đẳng thức cần chứng minh.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng : $(m+t)(n+u)(p+v) \geq \left(\sqrt[3]{mnp} + \sqrt[3]{tuv}\right)^3$.

Giải : Vế trái có thể viết :

$$(m+t)(n+u)(p+v) = mnp + tuv + (mup + tnp + mnv) + \\ + (tup + muv + tnv)$$

Vế phải có thể viết :

$$\left(\sqrt[3]{mnp} + \sqrt[3]{tuv}\right)^3 = mnp + tuv + 3\sqrt[3]{m^2n^2p^2.tuv} + 3\sqrt[3]{t^2u^2v^2.mnp}$$

Nhưng $\frac{mup + tnp + mnv}{3} \geq \sqrt[3]{m^2n^2p^2.tuv}$;

$$\frac{tup + muv + tnv}{3} \geq \sqrt[3]{t^2u^2v^2.mnp}.$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

5. Theo bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpski ta có thể viết vế trái t như sau :

$t[a(b + c) + b(c + d) + c(d + e) + d(e + f) + e(f + a) + f(a + b)] \geq$

$\geq \ (a + b + c + d + e + f)^2$, hay

$t[(a + d)(b + c) + (b + c)(f + c) + (f + c)(a + d)] \geq (a + b + c + d + e + f)^2$.

Nếu đặt $a + d = p$, $b + c = q$, $f + c = r$ thì bất đẳng thức cuối này có thể viết : $t(pq + qr + rp) \geq (p + q + r)^2$.

Nhưng $(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + rp) \geq 3(pq + qr + rp)$.

Từ đó ta suy ra $t \geq 3$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{1}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{\frac{1}{m+p}+\frac{1}{n+q}} \quad \text{với } m, n, p, q > 0.$$

Giải : Sau khi biến đổi ta được bất đẳng thức :

$$(m + p)(m + n)(n + q)(p + q) - (m + n + p + q)(p + q)mn -$$
$$- (m + n + p + q)pq(m + n) \geq 0.$$

Từ đó ta có : $(mq - np)^2 \geq 0$.

6. Ta xét ba số $m.\frac{1}{m}$, $n.\frac{1}{n}$ và $p.\frac{1}{p}$.

Trung bình cộng của chúng bằng : $\dfrac{m.\frac{1}{m} + n.\frac{1}{n} + p.\frac{1}{p}}{m + n + p} = \dfrac{3}{m + n + p}$;

Trung bình nhân của chúng bằng : $\sqrt[m+n+p]{\frac{1}{m^m}.\frac{1}{n^n}.\frac{1}{p^p}}$.

Vậy $\dfrac{3}{m + n + p} \geq \sqrt[m+n+p]{\frac{1}{m^m}.\frac{1}{n^n}.\frac{1}{p^p}}$, tức là :

$$\frac{m}{m^{m+n+p}}.\frac{n}{n^{m+n+p}}.\frac{p}{p^{m+n+p}} \geq \frac{1}{3}(m + n + p).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, chứng minh bất đẳng thức :

Nếu m, n, p là ba số hữu tỉ dương sao cho tổng của hai số lớn hơn số thứ ba thì :

$$\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^m\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^n\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^p \le 1.$$

Giải : Đặt $m = \frac{\alpha}{t}$, $n = \frac{\beta}{t}$, $p = \frac{\gamma}{t}$ với α, β, γ và t đều nguyên dương.

Xét vế trái $= \sqrt[t]{\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^\alpha\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^\beta\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^\gamma}$

Do α, β, γ là những số nguyên dương nên biểu thức dưới dấu căn có thể coi là tích của α hạng tử bằng $1+\frac{n-p}{m}$, β hạng tử bằng $1+\frac{p-m}{n}$ và γ hạng tử bằng $1+\frac{m-n}{p}$. Thế thì ta có :

$$\sqrt[\alpha+\beta+\gamma]{\left(1+\frac{n-p}{m}\right)^\alpha\left(1+\frac{p-m}{n}\right)^\beta\left(1+\frac{m-n}{p}\right)^\gamma} \le$$

$$\le \frac{\alpha\left(1+\frac{n-p}{m}\right)+\beta\left(1+\frac{p-m}{n}\right)+\gamma\left(1+\frac{m-n}{p}\right)}{\alpha+\beta+\gamma} = 1$$

Nâng hai vế lên lũy thừa bậc m + n + p ta sẽ được bất đẳng thức cần chứng minh.

7. Do $(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ nên ta có thể viết :

$$S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd$$

$$\ge 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + (ac + bd)$$

$$= 2\sqrt{(ac + bd)^2 + 1} + (ac + bd),\ \text{dạng } 2\sqrt{x^2 + 1} + x \text{ với } x = ac + bd.$$

Nhưng

$$\left(2\sqrt{x^2 + 1} + x\right)^2 = 4x^2 + 4 + 4x\sqrt{x^2 + 1} + x^2 = \left(2x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2 + 3 \ge 3.$$

- ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán sau :

Chứng minh bất đẳng thức : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2.$

Giải : Ta có : $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}$

Vì $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$

Vậy : $1 > 2\sqrt{2} - 2$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} > 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$$

....

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}.$$

Cộng tất cả bất đẳng thức này ta sẽ được kết quả phải chứng minh.

8. Ta có : $(m + n)^2 = 4$ hay $m^2 + n^2 + 2mn = 4$ (1)

Do $m^2 + n^2 \geq 2mn$ nên cộng thêm (1) được :

$$2(m^2 + n^2) \geq 4 \text{ hay } m^2 + n^2 \geq 2.$$

Do đó : $(m^2 + n^2)^2 = m^4 + n^4 + 2m^2n^2 \geq 4$, mà $m^4 + n^4 \geq 2m^2n^2$ nên cộng lại ta suy ra :

$$2(m^4 + n^4) \geq 4 \text{ hay } m^4 + n^4 \geq 2.$$

- ***Lời bình :***

a) Ta có thể *chứng minh bất đẳng thức tổng quát :* $m^{2^k} + n^{2^k} \geq 2.$

b) Ngoài ra có thể chứng minh thêm :

α) Nếu $m + n \geq 1$ *thì* $m^4 + n^4 \geq \frac{1}{8}$;

β) Nếu $m + n = 1$ *thì* $m^8 + n^8 \geq \frac{1}{128}$.

Giải : Thật thế :

α) Vì $m + n \geq 1$ nên $m^2 + 2mn + n^2 \geq 1$. Cộng thêm bất đẳng thức hiển nhiên $m^2 - 2mn + n^2 \geq 0$ được :

$$2m^2 + 2n^2 \geq 1 \text{ hay } m^2 + n^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Bình phương hai vế được : $m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \geq \frac{1}{4}$.

Lại cộng thêm bất đẳng thức hiển nhiên $m^4 - 2m^2n^2 + n^4 \geq 0$ được :

$$2m^4 + 2n^4 \geq \frac{1}{4} \text{ hay } m^4 + n^4 \geq \frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi $m = n = \frac{1}{2}$.

β) Do $m + n = 1$ nên suy ra $m^2 + 2mn + n^2 = 1$. Cộng thêm bất đẳng thức hiển nhiên $m^2 - 2mn + n^2 \geq 0$, được $2m^2 + 2n^2 \geq 1$.

Bình phương hai vế ta có : $4m^4 + 8m^2n^2 + 4n^4 \geq 1$. Cộng thêm bất đẳng thức hiển nhiên $4m^4 - 8m^2n^2 + 4n^4 \geq 0$, được : $8m^4 + 8n^4 \geq 1$. Từ đó $64m^8 + 128m^4n^4 + 64n^8 \geq 1$.

Lại cộng thêm bất đẳng thức hiển nhiên $64m^8 + 64n^8 - 128m^4n^4 \geq 0$ ta có : $128m^8 + 128n^8 \geq 1$ hay $m^8 + n^8 \geq \frac{1}{128}$.

9. Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$n! = 1.2.3\ldots n < \left(\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n}\right)^n = \left[\frac{n(n+1)}{2n}\right]^n.$$

Vậy $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$.

Giải : Ta có bất đẳng thức hiển nhiên :

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$$

hay $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) +$

$+ \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$, tức là :

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}.$$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi $n = 1$, $n = 2$ và $n = 3$.

10. Biểu thức có thể viết :

$$M = (m-5)(m-2)(m-1)(m-6) + 9$$
$$= (m^2 - 7m + 10)(m^2 - 7m + 6) + 9.$$

Đặt $m^2 - 7m + 6 = t$, ta có :

$$M = (t+4)t + 9 = t^2 + 4t + 9 = (t+2)^2 + 5 \geq 5.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 5 khi $t = -2$, tức là $m^2 - 7m + 8 = 0$.

Giải ra được $m_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = (m - x)(n - y)(px + qy)$$

trong đó m, n, p, q dương và m > x, n > y, px + qy > 0.

Giải : Ta có thể viết : $pqP = pq(m - x)(n - y)(px + qy)$

hay $pqP = (mp - px)(nq - qy)(px + qy)$ (1)

Do tổng $(mp - px) + (nq - qy) + (px + qy) = mp + nq$ không đổi nên biểu thức pqP đạt giá trị lớn nhất khi $mp - px = nq - qy = px + qy$ (2)

Giải (2) được : $x = \dfrac{2mp - nq}{3p}$, $y = \dfrac{2nq - mp}{3q}$.

Vậy giá trị lớn nhất của pqP bằng :

$$\left(mp - \frac{2mp - nq}{3}\right)\left(nq - \frac{2nq - mp}{3}\right)\left(\frac{2mp - nq}{3} + \frac{2nq - mp}{3}\right) = \frac{(mp + nq)^2}{27}.$$

Từ đó giá trị lớn nhất của P là $P = \dfrac{(mp + nq)^2}{27pq}$.

11. Vì với x, y > 0 thì : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$ hay $\dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{4}{(x + y)^2}$,

nên ta có :

$$A = \left(\frac{a}{b + c} + \frac{c}{d + a}\right) + \left(\frac{b}{c + d} + \frac{d}{a + b}\right)$$

$$= \frac{a(d + a) + c(b + c)}{(b + c)(d + a)} + \frac{b(a + b) + d(c + d)}{(c + d)(a + b)}$$

$$\geq 4.\frac{a^2 + ad + bc + c^2}{(a + b + c + d)^2} + 4.\frac{b^2 + ab + cd + d^2}{(a + b + c + d)^2}$$

$$\geq 2.\frac{(a + b + c + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2}{(a + b + c + d)^2} \geq 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là A = 2 khi a = b = c = d và một cách tổng quát với b + c = d + a, c + d = a + b, a = c, b = d, tức là với a = c, b = d.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Với giá trị nào của t thì biểu thức :

$T = (t - t_1)^2 + (t - t_2)^2 + ... + (t - t_n)^2$ *có giá trị nhỏ nhất ?*

Giải : Ta đặt : $t_1 + t_2 + ... + t_n = v$; $t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2 = v'$.

Ta có : $(t - t_1)^2 + (t - t_2)^2 + ... + (t - t_n)^2 = nt^2 - 2vt + v'$

$$= n\left[t^2 - \frac{2v}{n}t + \frac{v'}{n}\right] = n\left[\left(t - \frac{v}{n}\right)^2 + \frac{v'}{n} - \frac{v^2}{n^2}\right]$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi và chỉ khi biểu thức $\left(t - \frac{v}{n}\right)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất (vì biểu thức $\frac{v'}{n} - \frac{v^2}{n^2}$ không phụ thuộc vào t). Nhưng $\left(t - \frac{v}{n}\right)^2$ không thể âm nên giá trị nhỏ nhất của nó phải bằng 0. Suy ra : $t = \frac{v}{n} = \frac{t_1 + ... + t_n}{n}$.

Như vậy tổng T có giá trị nhỏ nhất khi $t = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_n}{n}$.

12. Ta thấy rằng biểu thức B và $\frac{1}{4}B^2$ đạt giá trị lớn nhất với cùng một giá trị của b.

Ta có : $\frac{1}{4}B^2 = \frac{1}{4}b^4(m^2 - b^2) = \frac{1}{2}b^2.\frac{1}{2}b^2(m^2 - b^2)$

Tổng $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}b^2 + (m^2 - b^2) = m^2$ không đổi, nên biểu thức $\frac{1}{4}B^2$ đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{1}{2}b^2 = m^2 - b^2$, tức là với $b^2 = \frac{2m^2}{3}$.

Do đó giá trị lớn nhất của B là :

$$B = \frac{2m^2}{3}\sqrt{m^2 - \frac{2m^2}{3}} = \frac{2|m^3|}{3\sqrt{3}} \quad \text{khi } b^2 = \frac{2m^2}{3}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm giá trị lớn nhất của hàm số* $z = 3t + 4\sqrt{1 - t^2}$.

Giải : Ta thấy ngay rằng hàm số z xác định nếu $1 - t^2 \geq 0$, tức là với $-1 \leq t \leq 1$.

Vì $z \leq 3|t| + 4\sqrt{1 - t^2}$ nên giá trị lớn nhất của z đạt được khi và chỉ khi $0 < t \leq 1$ (*)

Giá trị lớn nhất mà z và z^2 đạt được với cùng một giá trị của t, nên ta có : $z^2 = \left(3t + 4\sqrt{1 - t^2}\right)^2 = 9t^2 + 16 - 16t^2 + 24t\sqrt{1 - t^2}$

$$= -\left[16t^2 - 24t\sqrt{1 - t^2} + 9(1 - t^2)\right] + 25$$

$$= -\left(4t - 3\sqrt{1 - t^2}\right)^2 + 25 \leq 25.$$

Vậy giá trị lớn nhất của z bằng $\sqrt{25} = 5$ nếu $4t - 3\sqrt{1 - t^2} = 0$ hay $4t = 3\sqrt{1 - t^2}$, tức là $16t^2 = 9 - 9t^2$ hay $t = \frac{3}{5}$ phù hợp với điều kiện (*)

D. BẠN CÓ BIẾT ?

1. *Các số trung bình liên quan với nhau như thế nào ?*

Cho hai số dương a và b. Số $\frac{a+b}{2}$ gọi là số trung bình cộng của chúng, số $\sqrt{ab}$ gọi là số trung bình nhân, số $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ gọi là số trung bình điều hòa, số $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ gọi là số trung bình bình phương. Ta có :

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ (Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b).

2. *Chứng minh bất đẳng thức kép $\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{44}$*

Cách giải như sau :

Vì $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)^3 = 9\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right) + 12$ nên rõ ràng $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - 9x - 12$.

Ta viết f(x) dưới dạng $x(x^2 - 9) - 12$ để thấy rằng với $x > 3$ thì hàm số f(x) tăng. Ngoài ra $f\left(\sqrt[3]{43}\right) < 0$, $f\left(\sqrt[3]{44}\right) > 0$ theo tính toán.

Vậy $\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{44}$, vì $\sqrt[3]{43} > 3$ và $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} > 3$.

3. *Chứng minh bất đẳng thức trong tam giác*

Gọi a, b, c là cạnh của một tam giác và 2p là chu vi của nó. Chứng minh rằng : $\frac{a-b}{p-b} + \frac{b-c}{p-c} + \frac{c-a}{p-a} \le 0.$

– *CÁCH 1.* Giả sử $a \ge b \ge c$, thế thì $p - a \le p - b \le p - c$, nên :

$$\frac{a-b}{p-b} \le \frac{a-b}{p-a}, \qquad \frac{b-c}{p-c} \le \frac{b-c}{p-a}.$$

Cộng các bất đẳng thức này rồi thêm vào hai vế $\frac{c-a}{p-a}$, được :

$$\frac{a-b}{p-b} + \frac{b-c}{p-c} + \frac{c-a}{p-a} \le \frac{a-b}{p-a} + \frac{b-c}{p-a} + \frac{c-a}{p-a} = 0.$$

– *CÁCH 2.*

$$\frac{a-b}{p-b} + \frac{b-c}{p-c} + \frac{c-a}{p-a} = \left(1 - \frac{p-a}{p-b}\right) + \left(1 - \frac{p-b}{p-c}\right) + \left(1 - \frac{p-c}{p-a}\right)$$

$$= 3 - \left(\frac{p-a}{p-b} + \frac{p-b}{p-c} + \frac{p-c}{p-a}\right) \le 3 - 3\sqrt[3]{\frac{p-a}{p-b}.\frac{p-b}{p-c}.\frac{p-c}{p-a}} = 0.$$

§8. BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Biến đổi tương đương các bất phương trình

a) Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ và $y = h(x)$ là một hàm số (xác định trên $\mathscr{D}$). Ta nói rằng $f(x) < g(x)$ trên $\mathscr{D}$ tương đương với mỗi bất phương trình sau :

i) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$;

ii) $f(x).h(x) < g(x).h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in \mathscr{D}$;

iii) $f(x).h(x) < g(x).h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in \mathscr{D}$.

Khái niệm tương đương của bất phương trình là tương đối vì nó phụ thuộc vào việc xét bất phương trình trong tập hợp nào (tập số nguyên, tập số hữu tỉ, tập số vô tỉ, tập số thực).

b) Phép biến đổi một bất phương trình về một bất phương trình mới tương đương với bất phương trình đã cho gọi là phép biến đổi tương đương.

2. Chú ý

Trong quá trình giải bất phương trình nếu chỉ dùng các phép biến đổi tương đương thì không cần thử lại nghiệm tìm được. Nhưng có những trường hợp phải dùng đến các phép biến đổi không tương đương thì nhất thiết phải thử lại nghiệm tìm được để loại các nghiệm ngoại lai (nếu có).

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Các bất phương trình sau có tương đương không, vì sao ?

a) $x + 3 - \dfrac{1}{x-1} > -x + 2 - \dfrac{1}{x-1}$ và $x + 3 > -x + 2$

b) $\dfrac{y-3}{y^2 - 5y + 6} < 2$ và $2y^2 - 11y + 15 > 0$.

2. Cũng hỏi như trên đối với các bất phương trình sau :

a) $x^2 > 1$ và $1 + \dfrac{2}{x-1} > 0$ b) $\sqrt{y-1} < \sqrt{2-y}$ và $y - 1 < 2 - y$.

3. Giải các bất phương trình :

a) $-8x + 3(x - 2) > -x + 2$ b) $(y - 2)(3 + y)(1 - y) > 0$.

4. Giải các bất phương trình :

a) $t + |t - 1| > 5$ b) $|z^2 - 2z| < z$.

5. Giải : $\sqrt[3]{25z(2z^2 + 9)} \geq 4z + \dfrac{3}{z}$.

6. Cho bất phương trình : $3(k - 1)t + 1 > 2k + t$.

a) Giải bất phương trình với $k = 1 - 2\sqrt{2}$.

b) Tìm k để bất phương trình nhận mọi giá trị $t > 1$ là nghiệm.

7. Giải : a) $\dfrac{1}{x} \leq 1$ b) $\dfrac{y}{y-5} > \dfrac{1}{2}$.

8. Giải : a) $\dfrac{|x - 3|}{(x-2)(x-3)} \geq 2$ b) $\begin{cases} |12y - 3| \leq 3 \\ \dfrac{1}{y} < 1. \end{cases}$

9. Tìm tất cả giá trị của m để hệ sau có nghiệm duy nhất và giải hệ đó :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \\ x - y + m = 0. \end{cases}$$

10. Tìm những giá trị của m để bất phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{1 - y} + \sqrt{y} \leq m.$$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Bất phương trình thứ hai có được do thêm vào hai vế của bất phương trình đầu cùng một biểu thức $\dfrac{1}{x-1}$ không xác định khi $x = 1$. Điều này có nghĩa là $x = 1$ không thể là nghiệm của bất phương trình đầu. Nhưng $x = 1$ lại là nghiệm của bất phương trình thứ hai.

Do đó, tồn tại nghiệm của bất phương trình thứ hai không phải là nghiệm của bất phương trình đầu. Vậy hai bất phương trình đã cho không tương đương.

Bất phương trình thứ hai là hệ quả của bất phương trình đầu, vì mọi nghiệm của bất phương trình đầu là nghiệm của bất phương trình thứ hai.

b) Tập xác định của bất phương trình đầu là tập $\mathbb{R}\setminus\{2; 3\}$. Trên tập này bất phương trình $\dfrac{1}{y-2} < 2$ tương đương với bất phương trình đầu và có nghiệm $(-\infty; 2)$, $\left(\dfrac{5}{2}; 3\right)$ và $(3; +\infty)$.

Phương trình $2y^2 - 11y + 15 = 0$ có nghiệm là $y_1 = 3$ và $y_2 = \dfrac{5}{2}$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2y^2 - 11y + 15 > 0$ gồm hai khoảng

$\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Do đó, hai bất phương trình đã cho không tương đương. Hơn nữa không có bất phương trình nào là hệ quả của bất phương trình kia.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *hai bất phương trình sau có tương đương không, vì sao ?*

a) $\frac{z-8}{(z+7)^2} < 0$ *và* $z - 8 < 0$.

b) $\frac{1}{2t^2+t+1} < \frac{1}{t^2+1}$ *và* $(t^2+1) < 2t^2 + t + 1$.

Giải :

a) Bất phương trình thứ hai là do bất phương trình đầu nhân với biểu thức $(z + 7)^2$ luôn không âm nên hai bất phương trình đã cho là tương đương.

b) Hai bất phương trình này có dạng $\frac{1}{f(t)} < \frac{1}{g(t)}$ và $g(t) < f(t)$ nên chúng tương đương, chẳng hạn số $t = 1$ là nghiệm của bất phương trình thứ nhất $\left(\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\right)$ cũng là nghiệm của bất phương trình thứ hai $(2 < 4)$.

2. a) Bất phương trình $x^2 > 1$ có tập nghiệm là $x > 1$ và $x < -1$. Bất phương trình $1 + \frac{2}{x-1} > 0$ cũng có tập nghiệm như thế. Do đó hai bất phương trình này tương đương.

b) Miền xác định của bất phương trình $\sqrt{y-1} < \sqrt{2-y}$ là hệ :

$$\begin{cases} y - 1 \geq 0 \\ 2 - y \geq 0 \end{cases} \text{ tức là gồm các số thuộc đoạn } [1; 2].$$

Nghiệm của bất phương trình $y - 1 < 2 - y$ là tất cả các số thuộc khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy hai bất phương trình đã cho không tương đương, chẳng hạn số $y = -5$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không phải là nghiệm của bất phương trình đầu.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng : $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) + g(x) > 0. \end{cases}$

Cho ví dụ khi hai hệ bất phương trình này không tương đương.

Giải : Giả sử x_0 là nghiệm của hệ thứ nhất, thế thì $f(x_0) > 0$ và $g(x_0) > 0$, nên $f(x_0) + g(x_0) > 0$. Do đó hệ thứ hai là hệ quả của hệ thứ nhất.

Đặt $f(x) = x^2$, $g(x) = x$. Ta chứng minh rằng hai hệ :

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \text{ không tương đương.}$$

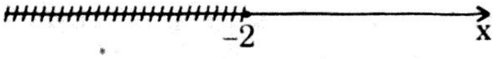
Thật vậy : $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x+1) > 0 \end{cases}$$

Như thế, tập nghiệm của hệ thứ hai gồm hai khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty$

3. a) Ta có : $-8x + 3x - 6 > -x + 2$ hay $x + 2 < 0$, do đó bất phương trình đã cho tương đương với $x + 2 < 0$.

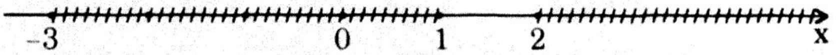
Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là tất cả các số thuộc khoảng $(-\infty; -2)$. Minh họa nghiệm bằng trục số :



b) Nhân bất phương trình với -1 ta được bất phương trình tương đương :

$[x - (-3)](x - 1)(x - 2) < 0$ hay $(x + 3)(x - 1)(x - 2) < 0$

Nghiệm của bất phương trình cuối này là tập các số x trong các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; 2)$, và đây cũng là nghiệm của bất phương trình đã cho. Minh họa nghiệm bằng trục số :



- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình sau :* $\sqrt{y+1} > 2y - 1$.

Giải : Điều kiện : $y \geq -1$.

– Nếu $y < \dfrac{1}{2}$ thì $2y - 1 < 0 \leq \sqrt{y+1}$ luôn đúng.

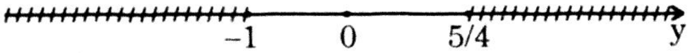
– Nếu $y > \dfrac{1}{2}$ thì cả hai vế đều dương, nên bình phương hai vế được :

$$y + 1 > (2y - 1)^2 = 4y^2 - 4y + 1 \text{ hay } 4y^2 - 5y < 0;\ 4y\left(y - \frac{5}{4}\right) < 0.$$

Từ đó : $y - \dfrac{5}{4} < 0$ $\left(\text{vì } y \geq \dfrac{1}{2}\right)$, ta có $\dfrac{1}{2} \leq y < \dfrac{5}{4}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-1 \leq y < \dfrac{5}{4}$.

Minh họa bằng trục số :



4. a) Bất phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau :

$$\begin{cases} t < 1 \\ t + 1 - t > 5 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} t \geq 1 \\ t + t - 1 > 5. \end{cases}$$

Giải ra được hệ : $\begin{cases} t \geq 1 \\ t > 3 \end{cases}$ hay $t > 3$.

b) Ta có : $z^2 - 2z < 0$ với $0 < z < 2$ và $z^2 - 2z \geq 0$ với $z \leq 0$ và $z \geq 2$. Do đó ta xét ba khoảng sau : $(-\infty; 0]$, $(0; 2)$ và $[2; +\infty)$.

Với $z \leq 0$ bất phương trình đã cho có dạng $z^2 - 2z < z$, tức là $z^2 < 3z$. Suy ra với $z \leq 0$ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $0 < z < 2$ thì bất phương trình có dạng $-(z^2 - 2z) < z$, tức là $z^2 - z > 0$, nên với những giá trị của z đã nêu thì chỉ nghiệm đúng với $1 < z < 2$. Vì thế nghiệm của bất phương trình là khoảng $(1; 2)$.

Với $z \geq 2$ ta có bất phương trình $z^2 - 2z < z$, tức là $z^2 - 3z < 0$ chỉ nghiệm đúng với $2 \leq z < 3$.

Kết hợp lại, nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $(1; 3)$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán :

Giải bất phương trình : $(u^2 + 4u + 10)^2 - 7(u^2 - 4u + 11) < 7$.

Giải : Đặt $u^2 + 4u + 10 = v > 0$, bất phương trình đã cho có thể viết :

$$v^2 - 7v + 7 - 7 < 0 \quad \text{hay} \quad v(v - 7) < 0.$$

Do $v > 0$ nên $v - 7 < 0$ hay $v < 7$. Thế thì $0 < v < 7$.

Từ đó ta có : $0 < u^2 + 4u + 10 < 7$.

Nhưng $u^2 + 4u + 10 = (u + 2)^2 + 6 > 0$ với mọi u nên bất phương trình $u^2 + 4u + 10 > 0$ nghiệm đúng với mọi y (1)

Còn bất phương trình $u^2 + 4u + 10 < 7$ hay $u^2 + 4u + 3 < 0$ tương đương với $(u + 1)(u + 3) < 0$ mà nghiệm là $-3 < u < -1$ (2)

Vậy, kết hợp (1) và (2) ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là $-3 < y < -1$.

5. Ta xét hai trường hợp :

a) Với $z > 0$. Nhân hai vế của bất phương trình với z được :

$$\sqrt[3]{25z^4(2z^2 + 9)} \geq 4z^2 + 3 \qquad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có :

$$5z^2 + 5z^2 + (2z^2 + 9) \geq 3\sqrt[3]{25z^4(2z^2 + 9)}$$

hay $4z^2 + 3 \geq \sqrt[3]{25z^4(2z^2 + 9)}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : để bất phương trình có nghiệm, dấu "=" phải xảy ra ở (2), khi đó $5z^2 = 2z^2 + 9$, tức là $z = \sqrt{3}$.

b) Với $z < 0$. Nhân hai vế với z được : $\sqrt[3]{25z^4(2z^2 + 9)} \leq 4z^2 + 3$.

Bất phương trình này đúng với mọi $z < 0$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán về biện luận sau :

Giải và biện luận : $(k^2 - 9)t = k^2 + 3k$ với $t > 2$.

Giải : Phương trình $(k^2 - 9)t = k^2 + 3k$ có nghiệm duy nhất là

$$t = \frac{k^2 + 3k}{k^2 - 9} = \frac{k(k+3)}{(k+3)(k-3)} = \frac{k}{k-3} \quad \text{nếu } k \neq \pm 3.$$

Với $k = 3$ thì phương trình vô nghiệm, còn nếu $k = -3$ thì có nghiệm với mọi số thực. Do đó các nghiệm của phương trình thỏa mãn $t > 2$ mới là nghiệm của phương trình đã cho.

Bây giờ ta xét tiếp xem với những giá trị nào của k thì bất phương trình $\frac{k}{k-3} > 2$. Rõ ràng với $k \neq 3$ thì bất phương trình tương đương với $2 - \frac{k}{k-3} < 0$, hay $(k - 6)(k - 3) < 0$, mà nghiệm là $3 < k < 6$.

Tóm lại : $k \leq -1$, vô nghiệm;

$k = -3$, mọi số thực $t > 2$ là nghiệm;

$-3 < k < 3$, vô nghiệm;

$3 < k < 6$, một nghiệm duy nhất $\frac{k}{k-4}$;

$k \geq 6$, vô nghiệm.

6. a) Thay $k = 1 - 2\sqrt{2}$, bất phương trình đã cho có dạng :

$$-(6\sqrt{2} + 1)t > 1 - 4\sqrt{2}, \quad \text{vậy } t < \frac{4\sqrt{2} - 1}{6\sqrt{2} + 1}.$$

b) Bất phương trình đã cho có thể viết : $(3k - 4)t + (1 - 2k) > 0$ (*)

Xét hàm số $f(t) = (3k - 4)t + 1 - 2k$ có đồ thị là một đường thẳng (vì có dạng $f(t) = at + b$) nên muốn cho bất phương trình (*) đúng với mọi $t > 1$ thì phải có : $\begin{cases} 3k - 4 > 0 \\ f(1) = k - 3 \geq 0. \end{cases}$ Giải ra được $k \geq 3$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng bất phương trình : $v^8 - v^5 + v^2 - v + 1 > 0$ luôn đúng với mọi v.

Giải : Ta xét ba trường hợp :

a) $v \le 0$. Ta có : $v^8 - v^5 + v^2 - v + 1 > 0$ vì cả bốn số hạng đều không âm.

b) $0 < v < 1$. Vế trái có thể viết :

$$v^8 + (v^2 - v^5) + (1 - v) = v^8 + v^2(1 - v^3) + (1 - v)$$

Cả ba số hạng đều dương, do đó vế trái dương.

c) $v \ge t$. Vế trái có thể viết : $v^5(v^3 - 1) + v(v - 1) + 1$

Hai số hạng đầu không âm, do đó vế trái dương.

Vậy bất phương trình đã cho luôn đúng với mọi v.

7. a) Bất phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{1-x}{x} \le 0, \text{ tương đương với hệ : } \begin{cases} x(1-x) \le 0 \\ x \ne 0. \end{cases}$$

Nghiệm của $x(1 - x) \le 0$ là tập các số trong khoảng $(-\infty; 0]$ và $[1; +\infty)$. Để ý thêm là $x \ne 0$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm là hai khoảng nói trên.

b) Do $\dfrac{y}{y-5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{y+5}{2(y-5)}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình $\dfrac{y+5}{y-5} > 0$ hay $(y + 5)(y - 5) > 0$.

Giải ra được nghiệm là tất cả các số thuộc khoảng $(-\infty; -5)$ và $(5; +\infty)$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình* : $\dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-1} \ge \dfrac{1}{z}$.

Giải : Bất phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{z(z-1) + z(z-2) - (z-1)(z-2)}{z(z-1)(z-2)} \ge 0 \text{ hay } \frac{z^2 - 2}{z(z-1)(z-2)} \ge 0,$$

tương đương với hệ : $\begin{cases} (z-2)z(z-1)(z-\sqrt{2})(z+\sqrt{2}) \ge 0 \\ z(z-1)(z-2) \ne 0. \end{cases}$

Giải ra được nghiệm của bất phương trình này là tất cả các số thuộc các khoảng $[-\sqrt{2}; 0]$, $[1; \sqrt{2})$ và $[2; +\infty)$.

Kết hợp với điều kiện : $z(z - 1)(z - 2) \ne 0$ hay $z \ne 0$, $z \ne 1$, $z \ne 2$, ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là tất cả các số thuộc các khoảng $[-\sqrt{2}; 0)$, $[1; \sqrt{2}]$ và $(2; +\infty)$.

8. a) Bất phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau :

$$\begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)} \ge 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x - 3 < 0 \\ -\dfrac{x-3}{(x-2)(x-3)} \ge 2. \end{cases}$$

Giải hệ thứ nhất, ta có :

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ \dfrac{1}{x - 2} \geq 2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x - 3 > 0 \\ \dfrac{x - \dfrac{5}{2}}{x - 2} \leq 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Giải hệ thứ hai, ta có :

$$\begin{cases} x - 3 < 0 \\ \dfrac{-1}{x - 2} \geq 2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x - 3 < 0 \\ \dfrac{x - \dfrac{3}{2}}{x - 2} \leq 0. \end{cases}$$

Giải ra được $\frac{3}{2} \leq x < 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là tất cả các số thuộc khoảng $\frac{3}{2} \leq x < 2$.

b) Điều kiện $y \neq 0$. Bất phương trình thứ nhất tương đương với bất phương trình kép $-3 \leq 2y - 3 \leq 3$ hay $0 \leq 2y \leq 6$, tức là $0 \leq y \leq 3$.

Nếu $y > 0$ thì bất phương trình $\frac{1}{y} < 1$ tương đương với $y > 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là tất cả các số thuộc khoảng $(1; 3]$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Giải hệ bất phương trình : $\begin{cases} 7z < 1 \\ \left(z + \dfrac{1}{2}\right)(z - 1) \leq 0. \end{cases}$

Giải : Nghiệm của bất phương trình thứ nhất là tất cả các số thuộc khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{7}\right)$. Nghiệm của bất phương trình thứ hai là tất cả các số thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Giao của hai khoảng này là $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{7}\right)$. Vậy nghiệm của hệ đã cho là tất cả các số thuộc khoảng $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{7}\right)$.

9. Hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases} x^2 + (x + m)^2 + 2x \leq 1 \\ y = x + m \end{cases}$

Bất phương trình $2x^2 + 2(m + 1)x + m^2 - 1 \leq 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi biệt thức của tam thức bằng 0, tức là :

$(m + 1)^2 - 2(m^2 - 1) = 0$, mà nghiệm là $m_1 = 3$, $m_2 = -1$.

Nếu m = 3 thì $m^2 + 4m + 4 = 0$ ta có, $x = -2$ và $y = 1$.

Nếu $m = -1$ thì $x^2 = 0$, ta có $x = 0$ và $y = -1$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm cặp số nguyên (z; t) thỏa mãn hệ bất phương trình :* $\begin{cases} t - \left|z^2 - 2z\right| + \dfrac{1}{2} > 0 \\ t + \left|z - 1\right| < 2. \end{cases}$

Giải : Hệ đã cho có thể viết : $\begin{cases} t + \dfrac{1}{2} > \left|z^2 - 2z\right| \\ t < 2 - \left|z - 1\right|. \end{cases}$

Do ta luôn có $|z^2 - 2z| \geq 0$ và $|z - 1| \geq 0$ nên $-\dfrac{1}{2} < t < 2$.

Các số nguyên duy nhất thỏa mãn bất phương trình này là 0 và 1. Do đó hệ đã cho chỉ có thể thỏa mãn với $t = 0$ và $t = 1$. Ta xét hai trường hợp :

– *Trường hợp 1.* Nếu $t = 0$ thì hệ đã cho có dạng $\begin{cases} \left|z^2 - 2z\right| < \dfrac{1}{2} \\ \left|z - 1\right| < 2 \end{cases}$

Bất phương trình thứ hai chỉ nghiệm đúng với các số nguyên 0, 1 và 2. Nhưng bất phương trình thứ nhất chỉ nghiệm đúng với 0 và 2 (loại 1). Vì thế, trong trường hợp này bất phương trình đã cho có hai nghiệm :

$$z_1 = 0,\ t_1 = 0 \quad \text{và} \quad z_2 = 2,\ t_2 = 0.$$

– *Trường hợp 2.* Nếu $t = 1$ thì hệ đã cho có dạng $\begin{cases} \left|z^2 - 2z\right| < \dfrac{3}{2} \\ \left|z - 1\right| < 1 \end{cases}$

Bất phương trình thứ hai chỉ nghiệm đúng với số nguyên 1 và giá trị này cũng thỏa mãn bất phương trình thứ nhất. Vì thế, trong trường hợp này có thêm một nghiệm $z_3 = 1$, $t_3 = 1$.

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm nguyên là $(z; t) = (0; 0) = (2; 0) = (1; 1)$.

10. Điều kiện để các biểu thức có nghĩa là $0 \leq y \leq 1$.

Đặt $\sqrt{y} = s$, $\sqrt{1 - y} = t$ với $0 \leq s, t \leq 1$, ta có :

$$y = s^2, \quad 1 - y = t^2 \quad \text{hay} \quad \begin{cases} s^2 + t^2 = 1 \\ s + t = m. \end{cases}$$

Từ đó : $(s + t)^2 - 2st = 1$ hay $s + t = \sqrt{1 + 2st} \geq 1$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của vế trái bằng 1 khi $st = 0$.

Nhưng bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq$ giá trị nhỏ nhất của vế trái. Vậy ta phải có $m \geq 1$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Giải và biện luận bất phương trình :

$$\sqrt{z+\sqrt{2pz-p^2}}+\sqrt{z-\sqrt{2pz-p^2}}\le\sqrt{2p}\qquad (\text{với } p>0).$$

Giải : Điều kiện : $2pz-p^2\ge 0,\ \ z\pm\sqrt{2pz-p^2}\ge 0$ hay $z\ge\dfrac{p}{2}$.

Đặt $\sqrt{2pz-p^2}=x\ge 0$, ta có :

$$z=\frac{x^2+p^2}{2p},\qquad \sqrt{z+\sqrt{2pz-p^2}}=\sqrt{\frac{x^2+p^2}{2p}+x}=\frac{|x+p|}{\sqrt{2p}}$$

$$\text{và}\qquad \sqrt{z-\sqrt{2pz-p^2}}=\frac{|x-p|}{\sqrt{2p}}.$$

Do đó bất phương trình đã cho có dạng sau :

$$|x+p|+|x-p|\le 2p\qquad (\text{với } p>0)\qquad (*)$$

Vì $p>0$ và $x\ge 0$ nên $|x+p|=x+p$ và (*) có dạng $|x-p|\le p-x$.

Suy ra : $x-p\le 0$ hay $0\le x\le p$, tức là ta được bất phương trình :

$$0\le\sqrt{2pz-p^2}\le p \text{ hay } z\le p.$$

Kết hợp với điều kiện $z\ge\dfrac{p}{2}$ ở trên ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là : $\dfrac{p}{2}\le z\le p$.

§9. DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT VÀ DẤU TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Dấu của nhị thức bậc nhất

a) Bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax + b$ $(a \neq 0)$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	trái dấu với a	0	**cùng dấu với a**

b) Nếu $a > 0$ thì :

$|x| < a$ tương đương với $-a < x < a$

$|x| > a$ tương đương với $\left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a. \end{array}\right.$

2. Dấu của tam thức bậc hai

a) Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì tam thức $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là $af(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$, tức là $af(x) > 0$ với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$. Khi đó :

  $f(x)$ trái dấu với a với mọi x nằm trong khoảng $(x_1; x_2)$, tức là $x_1 < x < x_2$;

  $f(x)$ cùng dấu với a với mọi x nằm ngoài đoạn $[x_1; x_2]$, tức là $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.

  Nói cách khác : $af(x) > 0$ nếu $x < x_1$, $x > x_2$

  $af(x) < 0$ nếu $x_1 < x < x_2$.

b) So sánh các nghiệm của một tam thức bậc hai với số α.

- Nếu $af(\alpha) < 0$ thì ta có $x_1 < \alpha < x_2$;
- Nếu $af(\alpha) = 0$ thì do $a \neq 0$ nên $f(\alpha) = 0$, tức là α trùng với một nghiệm của tam thức.
- Nếu $af(\alpha) > 0$ thì phải chú ý thêm về biệt thức Δ của tam thức;

Với $\Delta \geq 0$ thì tam thức có nghiệm và số α nằm ngoài khoảng hai nghiệm, tức là : $\dfrac{S}{2} - \alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} - \alpha > 0$ thì $\alpha < x_1 \leq x_2$

$\dfrac{S}{2} - \alpha < 0$ thì $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

c) Muốn tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ với mọi x cần phải có $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0; \end{cases}$

$f(x) < 0$ với mọi x cần phải có $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Cho $P(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

a) Phân tích P(x) thành nhân tử.

b) Giải bất phương trình P(x).

2. Giải các bất phương trình sau :

a) $\dfrac{(y + 2)(y - 2)(5 - y)}{(y - 3)(8 - 2y)} > 0$ b) $\dfrac{2 + z}{z(1 + z)} - 1 < 0$.

3. Với giá trị nào của m thì phương trình $\dfrac{(6m^2 - 3m - 2)t - 2}{2t - 4} = m - 1$ có nghiệm duy nhất và $|t| > 2$?

4. Giải :

a) $\dfrac{x^2 + 4x - 4}{2x^2 - x - 1} > 0$ b) $(y^2 - 3y + 2)(y^3 - 3y^2)(4 - y^2) \leq 0$.

5. Giải các bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối :

a) $|x^2 - 2x - 8| > 2x$ b) $\left|\dfrac{y^2 - 5y + 4}{y^2 - 4}\right| \leq 1$.

6. Giải :

a) $\big||z| - 1\big| < 1 - z$ b) $|t - 1| + |2 - t| > 3 + t$.

7. Giải :

a) $|3x^2 - 7x - 6| < |x^2 + x|$ b) $\dfrac{|y - 3|}{y^2 - 5y + 6} \geq 2$.

8. Giải các hệ bất phương trình :

a) $\begin{cases} 8z - 2 < z - 1 \\ 2z^2 - z - 1 \leq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4t^2 - 4t - 3 \leq 0 \\ \dfrac{1}{t^2} \geq 1. \end{cases}$

9. a) Tìm tất cả giá trị của k sao cho phương trình :

$$x^2 - 2(k-1)x + (2k+1) = 0 \quad \text{có hai nghiệm dương.}$$

b) Tìm m sao cho phương trình sau có hai nghiệm phân biệt :

$$(m-2)y^2 - 2my + 2m - 3 = 0.$$

Biểu diễn kết quả trên trục số của cả hai câu.

10. Cho tam thức $f(t) = t^2 - 6kt + (2 - 2k + 9k^2)$.

a) Tìm các giá trị của k để tam thức có hai nghiệm và số 4 nằm trong khoảng hai nghiệm đó.

b) Với giá trị nào của k thì cả hai nghiệm đều lớn hơn 3 ?

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Ta có thể viết :

$$\begin{aligned}
P(x) &= x^6(x+1) + x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1)\\
&= (x+1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1) = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)\\
&= (x+1)(x^2+1)(x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2)\\
&= (x+1)(x^2+1)[(x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2]
\end{aligned}$$

Cuối cùng :

$$P(x) = (x+1)(x^2+1)\left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right).$$

* Có thể *giải theo cách khác* như sau :

Vì $P(x) \neq 0$ nên ta có thể nhân và chia $P(x)$ với $x - 1$ được :

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).\frac{x-1}{x-1}\\
&= \frac{x-1}{x-1}.\frac{(x^4-1)(x^4+1)}{x-1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)(x^4+1)}{x-1}\\
&= \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)}{x-1} = (x+1)(x^2+1)(x^4+1)\\
&= (x+1)(x^2+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).
\end{aligned}$$

b) Ta nhận thấy rằng muốn bất phương trình $P(x) > 0$ thì do các nhân tử $x^2 + 1 > 0$, $x^2 + \sqrt{2}x + 1 > 0$ và $x^2 - \sqrt{2}x + 1 > 0$ với mọi x, nên chỉ cần $x + 1 > 0$, tức là $x > -1$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình :*

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} + \frac{1}{2+y} - \frac{1}{3+y} - \frac{1}{4+y} + \frac{1}{5+y} - \frac{1}{6+y} + \frac{1}{7+y} > 0.$$

Giải : Ta viết bất phương trình đã cho dưới dạng tương đương sau đây :

$$\frac{2y+7}{y(y+7)}-\frac{2y+7}{(y+1)(y+6)}+\frac{2y+7}{(y+2)(y+5)}-\frac{2y+7}{(y+3)(y+4)}>0$$

hay $$(2y+7)\left(\frac{1}{y^2+7y}-\frac{1}{y^2+7y+6}+\frac{1}{y^2+7y+10}-\frac{1}{y^2+7y+12}\right)>0.$$

Cộng các phân thức theo cặp trong dấu ngoặc được :

$$(2y+7)\left(\frac{3}{(y^2+7y)(y^2+7y+6)}+\frac{1}{(y^2+7y+10)(y^2+7y+12)}\right)>0$$

hay $$(2y+7).\frac{4(y^2+7y)^2+72(y^2+7y)+360}{(y^2+7y)(y^2+7y+6)(y^2+7y+10)(y^2+7y+12)}>0 \qquad (*)$$

Vì bất phương trình $4(y^2+7y)^2+72(y^2+7y)+360>0$ với mọi y nên (*) tương đương với bất phương trình :

$$\frac{2y+7}{y(y+7)(y+1)(y+6)(y+5)(y+2)(y+3)(y+4)}>0, \text{ tức là}$$

$$y(y+1)(y+2)(y+3)\left(y+\frac{7}{2}\right)(y+4)(y+5)(y+6)(y+7)>0.$$

Áp dụng cách xét dấu của nhị thức bậc nhất $ax+b$ $(a\neq 0)$ ta sẽ được kết quả là hợp của tập các khoảng sau :

$$(-7;-6)\cup(-5;-4)\cup\left(-\frac{7}{2};-3\right)\cup(-2;-1)\cup(0;+\infty).$$

2. a) Các nhị thức $y+2$; $y-2$; $5-y$; $y-3$ và $8-2y$ có các nghiệm theo thứ tự là : -2; 2; 5; 3 và 4.

Ta lập bảng xét dấu sau :

y	$-\infty$		-2		2		3		4		5		$+\infty$
$y+2$		−	0	+		+		+		+		+	
$y-2$		−		−	0	+		+		+		+	
$5-y$		+		+		+		+		+	0	−	
$y-3$		−		−		−	0	+		+		+	
$8-2y$		+		+		+		+	0	−		−	
VT BPT		−	0	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+	

Ta thấy ngay rằng : Nghiệm của bất phương trình là tất cả các số thuộc các khoảng $(-2;2)$, $(3;4)$ và $(5;+\infty)$.

b) Bất phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{2+z-z(1+z)}{z(1+z)}<0 \quad \text{hay} \quad \frac{2-z^2}{z(1+z)}=\frac{(\sqrt{2}+z)(\sqrt{2}-z)}{z(1+z)}<0.$$

Ta lập bảng xét dấu sau :

z	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		-1		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\sqrt{2}+z$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$\sqrt{2}-z$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
z		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+z$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
VT BPT		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ta thấy ngay rằng : Nghiệm của bất phương trình là tất cả các số thuộc các khoảng $(-\infty;\ -\sqrt{2})$, $(-1;\ 0)$ và $(\sqrt{2};\ +\infty)$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm *bài toán có giá trị tuyệt đối sau :* $\left|\dfrac{3|t|+2}{|t|-1}\right|<3.$

Giải : Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình kép :

$$-3<\frac{3|t|+2}{|t|-1}<3.$$

a) Giải $\dfrac{3|t|+2}{|t|-1}<3$. Ta có: $\dfrac{3|t|+2}{|t|-1}-3<0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5}{|t|-1}<0 \quad \Leftrightarrow \quad |t|<1.$

b) Giải $-3<\dfrac{3|t|+2}{|t|-1}$. Ta có: $\dfrac{3|t|+2}{|t|-1}+3>0$ hay $\dfrac{6|t|-1}{|t|-1}>0$; $\left[\begin{array}{l}|t|>1\\ |t|<\dfrac{1}{6}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $|t|<\dfrac{1}{6}$.

3. Điều kiện : $2t-4\neq 0$ hay $t\neq 2$.

Phương trình đã cho có thể viết : $m(6m-5)t=6-4m$ với $t\neq 2$.

Với điều kiện m phải đồng thời khác 0, $\dfrac{5}{6}$ và $-\dfrac{1}{2}$ ta có nghiệm duy nhất của phương trình là : $t=\dfrac{6-4m}{m(6m-5)}$.

Cuối cùng ta phải giải bất phương trình $|t|>2$, tức là giải bất phương trình $\left|\dfrac{6-4m}{m(6m-5)}\right|>2$. Do đó phải giải hai bất phương trình :

$$\frac{6-4m}{m(6m-5)} > 2 \quad \text{và} \quad \frac{6-4m}{m(6m-5)} < -2.$$

Giải ra ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$-\frac{1}{2} < m < 1 \quad (\text{với } m \neq 0,\ m \neq \frac{5}{6}).$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Với giá trị nào của k thì bất phương trình : $(v + 3 - 2k)(v + 3k - 2) < 0$ đúng với mọi v thuộc đoạn [2; 3] ?

Giải : Ta xét hai trường hợp : $k = 1$ và $k \neq 1$.

a) Nếu $k = 1$ thì bất phương trình vô nghiệm và giá trị này không thỏa mãn bài toán.

b) Nếu $k \neq 1$ thì :

– Với $k > 1$, nghiệm của bất phương trình có dạng $2 - 3k < v < 2k - 3$ và thỏa mãn điều kiện khi và chỉ khi $k > 3$, $k < 1$;

– Với $k < 1$, nghiệm của bất phương trình có dạng $2k - 3 < v < 2 - 3k$ và thỏa mãn điều kiện khi và chỉ khi $k < -\frac{1}{3}$.

4. a) Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình :

$$(x^2 + 4x - 4)(2x^2 - x - 1) > 0.$$

Phân tích các tam thức bậc hai thành nhân tử được :

$$(x + 2 + 2\sqrt{2})(x + 2 - 2\sqrt{2})\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) > 0 \quad (*)$$

Sắp xếp nghiệm các nhị thức ta có : $-2 - 2\sqrt{2} < -\frac{1}{2} < -2 + 2\sqrt{2} < 1$.

Giải ra ta được nghiệm của (*) tức cũng là nghiệm của bất phương trình đã cho là tất cả các số thuộc các khoảng :

$$(-\infty; -2 - 2\sqrt{2}),\ \left(-\frac{1}{2}; -2 + 2\sqrt{2}\right) \text{ và } (1; +\infty).$$

b) Ta có thể viết : $y^2 - 3y + 2 = (y - 2)(y - 1)$; $y^3 - 3y^2 = y^2(y - 3)$;

$$4 - y^2 = -(y + 2)(y - 2).$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với :

$$(y + 2)y^2(y - 1)(y - 2)^2(y - 3) \geq 0.$$

Giải ra được nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$[-2; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình :* $(z + 3)^4 + (z + 5)^4 \geq 4$.

  Giải : Trước hết ta giải phương trình : $(z + 3)^4 + (z + 5)^4 = 0$.

  Đưa vào ẩn mới $t = \dfrac{(z + 3) + (z + 5)}{2} = z + 4$, phương trình này có dạng :

  $$(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 4.$$

  Sau khi khai triển được :

  $$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 4$$

  hay $\quad t^4 + 6t^2 - 1 = 0 \qquad (*)$

  Giải phương trình trùng phương này được hai nghiệm là $\sqrt{10} - 3$ và $-\sqrt{10} - 3$ nên phương trình $(*)$ có thể viết :

  $$(t^2 + 3 - \sqrt{10})(t^2 + 3 + \sqrt{10}) = 0$$

  Vì $t^2 + 3 + \sqrt{10} > 0$ với mọi t nên bất phương trình :

  $$(t^2 + 3 - \sqrt{10})(t^2 + 3 + \sqrt{10}) \geq 0$$

  tương đương với bất phương trình : $t^2 + 3 - \sqrt{10} \geq 0$.

  Chuyển sang ẩn z được bất phương trình : $(z + 4)^2 \geq \sqrt{10} - 3$.

  Giải ra được nghiệm của nó, tức cũng là nghiệm của bất phương trình đã cho, là tất cả các số thuộc hai khoảng :

  $$\left(-\infty; -4 - \sqrt{\sqrt{10} - 3}\right] \text{ và } \left[-4 + \sqrt{\sqrt{10} - 3}; +\infty\right).$$

5. a) Bất phương trình đã cho tương đương với hai bất phương trình :

$$x^2 - 2x - 8 > 2x \quad \text{và} \quad x^2 - 2x - 8 < -2x$$

hay $\quad x^2 - 4x - 8 > 0 \quad$ và $\quad x^2 - 8 < 0$.

Nghiệm của bất phương trình $x^2 - 4x - 8 > 0$ là tất cả các số x thuộc $x < 2 - 2\sqrt{3}$ và $x > 2 + 2\sqrt{3}$.

Nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8 < 0$ chỉ là tất cả các số x thuộc $-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$.

Do $-2\sqrt{2} < 2 - 2\sqrt{3} < 2\sqrt{2} < 2 + 2\sqrt{3}$ nên nghiệm của hai bất phương trình trên tức cũng là nghiệm của bất phương trình đã cho là tất cả các số thuộc hai khoảng $(-\infty; 2\sqrt{2})$ và $(2 + 2\sqrt{3}; +\infty)$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2 - 5y + 4}{y^2 - 4} \leq 1 \\ \dfrac{y^2 - 5y + 4}{y^2 - 4} \geq -1. \end{cases}$$

Bất phương trình thứ nhất của hệ lại tương đương bất phương trình

$$\frac{y - \frac{8}{5}}{(y + 2)(y - 2)} \geq 0.$$

Giải ra được nghiệm là tất cả các số thuộc các khoảng $-2 < y \leq \frac{8}{5}$ và $2 < y < +\infty$, tức là $\left(-2; \frac{8}{5}\right]$ và $(2; +\infty)$.

Bất phương trình thứ hai tương đương với bất phương trình :

$$\frac{y\left(y - \frac{5}{2}\right)}{(y + 2)(y - 2)} \geq 0$$

mà nghiệm là các khoảng $(-\infty; -2)$, $[0; 2)$ và $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Cuối cùng nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[0; \frac{8}{5}\right] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình :* $|z^3 - z| \geq 1 - z$.

Giải : Bất phương trình đã cho tương đương với hai bất phương trình :

$$z^3 - z \geq 1 - z \quad \text{và} \quad z^3 - z \leq -(1 - z)$$

$$\text{hay} \quad z^3 - 1 \geq 0 \quad \text{và} \quad z^3 - 2z + 1 \leq 0.$$

Bất phương trình thứ nhất chỉ thỏa mãn với $z \geq 1$ vì

$$z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) \text{ mà } z^2 + z + 1 > 0 \text{ với mọi } z.$$

Do $z^3 - 2z + 1 = (z - 1)\left(z + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$ nên tập nghiệm của bất phương trình thứ hai là $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; 1\right]$.

Cuối cùng nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; +\infty\right).$$

6. a) Giải bất phương trình đã cho tương đương với giải hệ :

$$\begin{cases} |z - 1| < 1 - z \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} |-z - 1| < 1 - z \\ z < 0. \end{cases}$$

Bất phương trình $|z - 1| < 1 - z$ vô nghiệm nên hệ thứ nhất vô nghiệm.

Bất phương trình $|-z - 1| < 1 - z$ tương đương với bất phương trình $|z + 1| < 1 - z$ lại tương đương với hệ :

$$\begin{cases} z + 1 < 1 - z \\ z + 1 > -(1 - z). \end{cases}$$

Cuối cùng nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; 0)$.

* Có thể *giải cách khác* như sau :

Bất phương trình đã cho tương đương với hệ : $\begin{cases} |z| + z - 2 < 0 \\ |z| - z > 0 \end{cases}$ (*)

Bất phương trình $|z| - z > 0$ tương đương với hệ :

$$\begin{cases} z - z > 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} -z - z > 0 \\ z < 0 \end{cases} \quad \text{mà nghiệm là } -\infty < z < 0.$$

Do bất phương trình $|z| + z - 2 < 0$ chỉ giải được khi $z < 0$, mà sẽ có dạng $-2 < 0$, cho nên tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; 0)$.

b) Xét ba khoảng : $t < 1$, $1 \leq t \leq 2$, $t > 2$.

– Nếu $t < 1$ thì $t - 1 < 0$ và $2 - t > 0$. Bất phương trình đã cho có dạng $1 - t + 2 - t > 3 + t$ hay $t < 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là tất cả số âm.

– Nếu $1 \leq t \leq 2$ thì $t - 1 \geq 0$, $2 - t \geq 0$. Ta có :

$$\begin{cases} 1 \leq t \leq 2 \\ t - 1 + 2 - t > 3 + t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} 1 \leq t \leq 2 \\ t < -2. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm, do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm.

– Nếu $t > 2$ thì $t - 1 > 0$, $2 - t < 0$. Ta có :

$$\begin{cases} t > 2 \\ t - 1 + t - 2 > 3 - t \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} t > 2 \\ t > 6. \end{cases} \quad \text{Do đó } t > 6.$$

Kết hợp các nghiệm ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$(-\infty; 0) \cup (6; +\infty).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình :* $\left|1 - \dfrac{|v|}{1 + |v|}\right| \geq \dfrac{1}{2}$.

Giải : Bất phương trình này tương đương với hai hệ :

$$\begin{cases} \left|1 - \dfrac{v}{1 + v}\right| \geq \dfrac{1}{2} \\ v \geq 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \left|1 - \dfrac{-v}{1 - v}\right| \geq \dfrac{1}{2} \\ v < 0. \end{cases}$$

Ta giải hệ thứ nhất được :

$$\begin{cases} \left|\dfrac{1}{1+v}\right| \geq \dfrac{1}{2} \\ v \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1+v} \geq \dfrac{1}{2} \\ v > 0 \end{cases} \quad \text{tức là} \quad \begin{cases} 1 - v \geq 0 \\ v \geq 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có : $\begin{cases} v \leq 1 \\ v \geq 0 \end{cases}$ hay $0 \leq v \leq 1$.

Giải tiếp hệ thứ hai : Nếu $v < 0$ thì $1 - v > 0$ nên hệ thứ hai tương đương với hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{1-v} \geq \dfrac{1}{2} \\ v < 0. \end{cases}$

Nghiệm của hệ là $-1 \leq v < 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là tất cả các số thuộc đoạn $[-1; 1]$.

7. a) Ta có thể viết : $3x^2 - 7x - 6 = 3(x - 3)\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$ và $x^2 + x = x(x + 1)$.

Do đó ta phải xét 5 khoảng sau : $x < 1$; $-1 \leq x \leq -\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{2}{3} < x < 0$; $0 \leq x \leq 3$ và $x > 3$.

– Nếu $x < -1$ thì $3x^2 - 7x + 6 > 0$ và $x^2 + x > 0$. Ta có :

$$3x^2 - 7x - 6 < x^2 + x \quad \text{hay} \quad 2x^2 - 8x - 6 < 0,$$

suy ra $\quad 2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}$.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm vì $2 - \sqrt{7} > -1$.

– Nếu $-1 \leq x \leq -\dfrac{2}{3}$ thì $3x^2 - 7x + 6 \geq 0$ và $x^2 + x \leq 0$. Ta có :

$$3x^2 - 7x - 6 < -x^2 - x \quad \text{hay} \quad 4x^2 - 6x - 6 < 0.$$

Từ bất phương trình $4x^2 - 6x - 6 < 0$ thì $\dfrac{1}{4}(3 - \sqrt{33}) < x < \dfrac{1}{4}(3 + \sqrt{33})$.

Do $-1 < \dfrac{1}{4}(3 - \sqrt{33}) < -\dfrac{2}{3}$ nên nghiệm của bất phương trình đã cho là khoảng $\dfrac{1}{4}(3 - \sqrt{33}) < x \leq -\dfrac{2}{3}$.

– Nếu $-\dfrac{2}{3} < x < 0$ thì $x^2 + x < 0$ và $3x^2 - 7x + 6 < 0$, ta có :

$$-3x^2 + 7x + 6 < -x^2 - x \quad \text{hay} \quad x^2 - 4x - 3 > 0.$$

Vì $x^2 - 4x - 3 = (x - 2 + \sqrt{7})(x - 2 - \sqrt{7})$ và $-\dfrac{2}{3} < 2 - \sqrt{7} < 0$ nên bất phương trình đã cho nghiệm đúng trong khoảng $-\frac{2}{3} < x < 2 - \sqrt{7}$.

– Nếu $0 \le x \le 3$ thì $3x^2 - 7x - 6 \le 0$ và $x^2 + x \ge 0$. Ta có :

$$-3x^2 + 7x + 6 < x^2 + x \quad \text{hay} \quad 2x^2 - 3x - 3 > 0.$$

Vì $2x^2 - 3x - 3 = 2\left[x - \frac{1}{4}(3 + \sqrt{33})\right]\left[x - \frac{1}{4}(3 - \sqrt{33})\right]$

và $\frac{1}{4}(3 + \sqrt{33}) < 3$ nên nghiệm của bất phương trình đã cho là :

$$\frac{1}{4}(3 + \sqrt{33}) < x \le 3.$$

– Nếu $x > 3$ thì $3x^2 - 7x - 6 > 0$ và $x^2 + x > 0$. Ta có :

$$3x^2 - 7x - 6 < x^2 + x \quad \text{hay} \quad x^2 - 4x - 3 < 0;$$

$$2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}\,; \qquad 3 < x < 2 + \sqrt{7}.$$

Vậy trong trường hợp này nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$3 < x < 2 + \sqrt{7}.$$

Tóm lại, bất phương trình đã cho (sau khi kết hợp các trường hợp) có nghiệm là :

$$\frac{1}{4}(3 - \sqrt{33}) < x < 2 - \sqrt{7} \quad \text{và} \quad \frac{1}{4}(3 + \sqrt{33}) < x < 2 + \sqrt{7}.$$

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hai hệ :

$$\begin{cases} y - 3 \ge 0 \\ \dfrac{y - 3}{y^2 - 5y + 6} \ge 2 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y - 3 < 0 \\ -\dfrac{y - 3}{y^2 - 5y + 6} \ge 2. \end{cases}$$

Giải hệ thứ nhất ta có (do $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$) :

$$\begin{cases} y - 3 > 0 \\ \dfrac{1}{y - 2} \ge 2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} y - 3 > 0 \\ \dfrac{5 - 2y}{y - 2} \ge 0 \end{cases} \quad \text{tức là} \quad \begin{cases} y - 3 > 0 \\ \dfrac{y - \frac{5}{2}}{y - 2} \le 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Giải hệ thứ hai ta có :

$$\begin{cases} y - 3 < 0 \\ \dfrac{-1}{y - 2} \ge 2 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} y - 3 < 0 \\ \dfrac{2y - 3}{y - 2} \le 0 \end{cases} \quad \text{tức là} \quad \begin{cases} y - 3 < 0 \\ \dfrac{y - \frac{3}{2}}{y - 2} \le 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \frac{3}{2} \le y < 2.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{3}{2} \le y < 2$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải bất phương trình* : $z - |t| \geq 1 + \sqrt{z^2 + t^2 - 1}$.

Giải : Điều kiện : $z^2 + t^2 - 1 \geq 0$. Suy ra $z - |t| \geq 0$. Bình phương hai vế của bất phương trình đã cho được hệ tương đương :

$$\begin{cases} -z|t| \geq \sqrt{z^2 + t^2 - 1} \\ z \geq |t| \end{cases} \qquad (*)$$

Vì $z \geq |t| \geq 0$ nên vế trái của (*) không dương, còn vế phải âm. Do đó hệ chỉ nghiệm đúng trong trường hợp cả hai vế đều bằng 0, tức là bất phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} z|t| = 0 \\ z^2 + t^2 - 1 = 0 \\ z \geq |t|. \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất $z|t| = 0$ có nghiệm là : hoặc $z = 0$, hoặc $t = 0$.

Nếu $z = 0$ thì từ bất phương trình $z \geq |t|$ ta có $t = 0$. Nhưng cặp $(0; 0)$ không thuộc tập xác định của bất phương trình.

Nếu $t = 0$ thì phương trình thứ hai (với $z \geq 0$) ta có $z = 1$.

Vậy cặp $(1; 0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

8. a) Hệ đã cho tương đương với hệ sau : $\begin{cases} 7z < 1 \\ \left(z + \dfrac{1}{2}\right)(z - 1) \leq 0. \end{cases}$

Nghiệm của bất phương trình thứ nhất là khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{7}\right)$. Nghiệm của bất phương trình thứ hai là đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; 1\right]$. Giao của hai tập này là $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{7}\right)$. Vậy nghiệm của hệ đã cho là tất cả các số thuộc khoảng $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{7}\right)$.

b) Hệ đã cho tương đương với hệ sau : $\begin{cases} \left(t + \dfrac{1}{2}\right)\left(t - \dfrac{3}{2}\right) \leq 0 \\ \dfrac{1 - t^2}{t^2} \geq 0. \end{cases}$

Nghiệm của bất phương trình thứ nhất là tất cả các số thuộc đoạn $\left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$.

Bất phương trình thứ hai tương đương với bất **phương trình** :

$$\frac{(1+t)(1-t)}{t^2} \geq 0, \text{ mà nghiệm là } [-1; 0) \cup (0; 1].$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho **là giao của hai tập** trên, tức là tất cả các số thuộc $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1]$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm tất cả giá trị của m sao cho **tập nghiệm** của hệ :*

$$\begin{cases} \dfrac{v^2 + mv - 2}{v^2 - v + 1} < 2 \\ \dfrac{v^2 + mv - 2}{v^2 - v + 1} > -3 \end{cases} \quad \text{là tất cả trục số.}$$

Giải : Hệ đã cho tương đương với hệ sau :

$$\begin{cases} \dfrac{v^2 - (m+2)v + 4}{v^2 - v + 1} > 0 \\ \dfrac{4v^2 + (v-3)v + 1}{v^2 - v + 1} > 0. \end{cases}$$

Do $v^2 - v + 1 > 0$ với mọi v nên hệ này lại **tương đương với hệ** :

$$\begin{cases} v^2 - (m+2)v + 4 > 0 \\ 4v^2 + (m-3)v + 1 > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Như vậy bài toán quy về tìm tất cả giá trị của **m sao cho tập nghiệm** các số thực là nghiệm của (*), tức là nghiệm **của mỗi bất phương trình** của hệ này.

Do các hệ số của số hạng bậc cao nhất là dương, **nên điều kiện cần** và đủ là biệt thức tương ứng của các tam thức bậc hai là **âm, nghĩa là** m phải thỏa mãn hệ sau :

$$\begin{cases} (m+2)^2 - 16 < 0 \\ (m-3)^2 - 16 < 0. \end{cases}$$

Nghiệm của bất phương trình thứ nhất là tập (–6; 2), **của bất phương** trình thứ hai là tập (–1; 7). Do đó nghiệm của hệ **này là tập (–1; 2).**

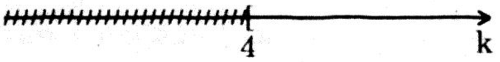
Vậy nghiệm của hệ đã cho với mọi m thuộc **khoảng (–1; 2) là tập tất** cả số thực.

9. a) Muốn phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 **và** x_2 **đều dương** thì điều kiện cần và đủ là biệt thức Δ **phải không âm, còn tích** x_1x_2 **và** tổng $x_1 + x_2$ phải dương (theo định lí Viét), **tức là k phải thỏa mãn** hệ sau :

$$\begin{cases}[-2(k-1)]^2 - 4(2k+1) \geq 0\\ 2(k-1) > 0\\ 2k+1 > 0\end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases}k(k-4) \geq 0\\ k-1 > 0\\ 2k+1 > 0.\end{cases}$$

Giải hệ cuối này được kết quả là : Muốn hệ đã cho có hai nghiệm dương thì k phải thuộc khoảng $[4; +\infty)$.

Biểu diễn trên trục số :



b) Muốn phương trình đã cho có hai nghiệm y_1 và y_2 phân biệt thì điều kiện cần và đủ là biệt thức Δ phải dương, tức là $m \neq 0$ và

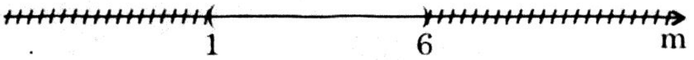
$$4m^2 - 4(m-2)(2m-3) > 0 \quad (*)$$

Do $4m^2 - 4(m-2)(2m-3) = -4(m^2 - 7m + 6) = -4(m-1)(m-6)$, nên tập nghiệm của (*) là hợp của hai khoảng $(1; 2)$ và $(2; 6)$.

Vậy nghiệm của bài toán là : mọi giá trị của m thuộc hợp các tập :

$$(1; 2) \cup (2; 6).$$

Biểu diễn trên trục số :



- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm tất cả các giá trị của p sao cho phương trình :*

$$2z^2 - 2(2p+1)z + p(p-1) = 0$$

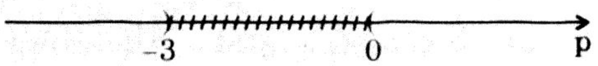
có hai nghiệm z_1 và z_2 thỏa mãn điều kiện $z_1 < p < z_2$.

Giải : Số p phải nằm giữa các nghiệm và thỏa mãn bất đẳng thức :

$2p^2 - 2(2p+1)p + p(p-1) < 0$, tức là bất đẳng thức $-p^2 - 3p < 0$.

Giải ra sẽ tìm được kết quả là : p là tất cả các số thuộc các khoảng $p < -3$ và $p > 0$.

Biểu diễn trên trục số :



10. a) Điều kiện để số 4 nằm trong khoảng hai nghiệm là $af(4) < 0$.

Do $a = 1$ nên $f(4) = 9k^2 - 26k + 18 < 0$, từ đó suy ra :

$$\frac{13-\sqrt{7}}{9} < k < \frac{13+\sqrt{7}}{9}.$$

b) Muốn cả hai nghiệm đều lớn hơn 3 thì điều kiện là :

$$\begin{cases}\Delta' \geq 0\\ af(3) > 0\\ \dfrac{S}{2} > 3\end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases}2k-2 \geq 0\\ 9k^2 - 20k + 11 > 0\\ 3k > 3.\end{cases}$$

Giải hệ này được nghiệm là $k > \dfrac{11}{9}$.

- ***Lời bình :*** *Cho tam thức bậc hai* $f(t) = at^2 + bt + c$. *Hãy nêu các điều kiện để :*

  a) số α *nằm trong khoảng hai nghiệm.*

  b) cả hai nghiệm lớn hơn α.

  c) cả hai nghiệm nhỏ hơn α.

  d) cả hai nghiệm nằm trong khoảng $(\alpha; \beta)$.

  e) trong khoảng $(\alpha; \beta)$ *tam thức có đúng một nghiệm (còn nghiệm kia nằm ngoài).*

  Giải : Các điều kiện là :

  a) $af(\alpha) < 0$

  b) $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$

  c) $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$

  d) $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$

  e) $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

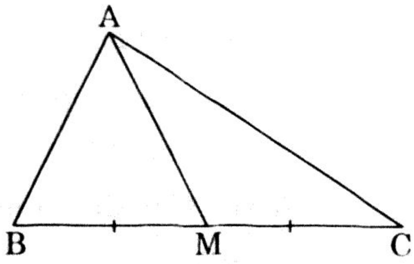
  Bài toán 10 ở trên thuộc các điều kiện a) và b).

§10. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1.a) Trong ΔABC với *trung tuyến* AM ta có :

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{1}{2}BC^2 \quad \text{(hình 4).}$$



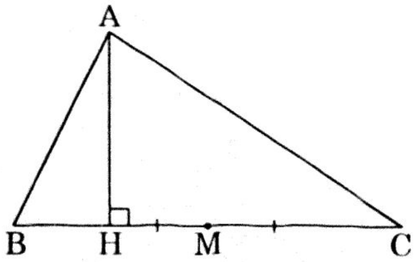
H.4

– Cho đoạn thẳng BC = a. *Quỹ tích* những điểm A thỏa mãn điều kiện :

$AB^2 + AC^2 = k^2 \left(k > \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$ là đường tròn tâm M, trung điểm của BC, bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$.

b) Trong ΔABC với AH là đường cao, M là trung điểm của BC, ta có :

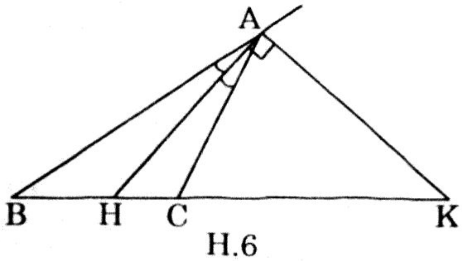
$AC^2 - AB^2 = 2BC.HM$ (hình 5).



H.5

– Cho đoạn thẳng BC = a. *Quỹ tích* những điểm A thỏa mãn điều kiện :
$AC^2 - AB^2 = k$ (k là hằng số) là đường thẳng vuông góc với BC tại điểm H mà $HM = \frac{k}{2BC}$ (M là trung điểm của BC).

2. Cho đoạn thẳng BC = a. *Quỹ tích* những điểm M thỏa mãn điều kiện $\frac{MB}{MC} = k$ (k là hằng số dương khác 1) là đường tròn, đường kính HK (H và K là các điểm chia trong và chia ngoài đoạn BC theo tỉ số k). Đường tròn này gọi là *đường tròn Apôlôniut* (hình 6).



H.6

3. **Các công thức tính diện tích tam giác**

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$S = pr$ (p là nửa chu vi)

$$S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hêrông).

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Tính các trung tuyến của ΔABC theo ba cạnh a, b, c.

2. Cho ΔDEF có ba cạnh dài d, e, f và ba trung tuyến tương ứng m_d, m_e, m_f. Chứng minh hệ thức : $m_d^2 + m_e^2 + m_f^2 = \frac{3}{4}(d^2 + e^2 + f^2)$.

3. Tìm cạnh thứ ba p của ΔMNP biết hai cạnh m, n và các trung tuyến ứng với chúng cắt nhau theo góc vuông. Cần điều kiện gì để tam giác đó tồn tại ?

4. Chứng minh rằng : Nếu ΔABC có $\widehat{A} = 60^\circ$ thì các cạnh của nó thỏa mãn hệ thức $a^2 = b^2 + c^2 - bc$. Điều đảo lại có đúng không ?

5. Tính khoảng cách từ trực tâm đến ba đỉnh của ΔABC theo ba cạnh a, b, c của tam giác.

6. Cho hai đường tròn bán kính R = 1, đồng thời khoảng cách OO' giữa hai tâm cũng bằng 1. Trên đường tròn (O) lấy điểm M, trên đường tròn (O') lấy các điểm N_1 và N_2 đối xứng qua đường nối tâm. Chứng minh rằng : $MN_1^2 + MN_2^2 \geq 2$.

7. Chứng minh rằng trong mọi tam giác tổng ba trung tuyến nhỏ hơn chu vi nhưng lớn hơn $\frac{3}{4}$ chu vi của tam giác.

8. Cho ΔABC có ba cạnh a, b, c. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

9. Độ dài các cạnh của một tam giác lập thành một cấp số cộng. Diện tích của nó bằng $\frac{2}{3}$ diện tích của tam giác đều có cùng chu vi. Tính tỉ lệ giữa các cạnh của tam giác đã cho.

10. Chứng minh rằng mọi tứ giác có diện tích S và chu vi P đều có thể chứa một đường tròn bán kính $\frac{S}{P}$.

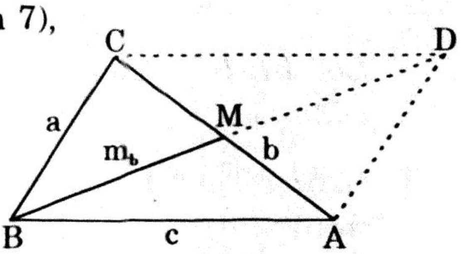
11. Trong một tam giác có hai cạnh cho trước là a, b và tổng hai đường cao kẻ tới hai cạnh đó bằng đường cao thứ ba. Tính cạnh thứ ba c.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Trước hết ta dựng ΔABC theo ba cạnh (hình 7), sau đó dựng hình bình hành ABCD.

Ta có : $(2m_b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2c^2$.

Từ đó : $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$



H.7

Tương tự tìm được :

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\ ; \qquad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}\ ,$$

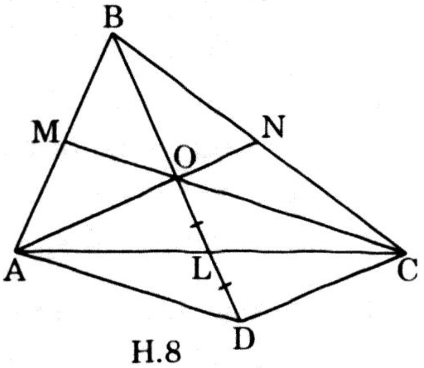
trong đó m_a, m_b, m_c là ba trung tuyến.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tính các cạnh a, b, c của tam giác theo ba trung tuyến m_a, m_b, m_c.*

Giải : Xét ΔABC trong đó AN = m_a, BL = m_b, CM = m_c (hình 8).

Kéo dài trung tuyến BL chẳng hạn một đoạn LD = OL, rồi nối D với A và C được hình bình hành AOCD. Ta có :

$$b^2 = 2\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2$$



H.8

Từ đó : $b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$

Tương tự tìm được :

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$$

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}\ .$$

2. Theo hệ thức giữa các cạnh với trung tuyến trong một tam giác ta có :

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}\ ; \qquad b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}\ ;$$

$$c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

Cộng ba đẳng thức này được :

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

hay $\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 2\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$

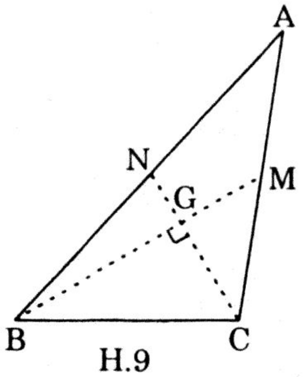
tức là $\frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2.$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *các trung tuyến xuất phát từ B và C của ΔABC vuông góc với nhau. Tìm hệ thức giữa các cạnh a, b, c của tam giác.*

Giải : Theo hệ thức giữa trung tuyến với các cạnh của tam giác ta có (hình 9) :

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$



H.9

Cộng từng vế được :

$$2a^2 + b^2 + c^2 = 2(m_a^2 + m_c^2) + \frac{b^2 + c^2}{2} \quad (*)$$

Mặt khác, trong tam giác vuông BGC ta có :

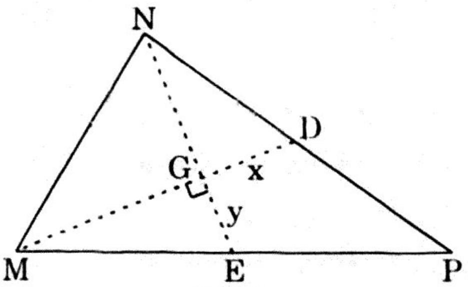
$$\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 \text{ hay } m_a^2 + m_c^2 = \frac{9}{4}a^2$$

Thay vào (*) và rút gọn được : $5a^2 = b^2 + c^2$.

3. Gọi G là giao điểm hai trung tuyến MD và NE (với MD ⊥ NE) (hình 10). Đặt GD = x, GE = y. Xét ba tam giác MGN, NGD và MGE, ta có :

$$4x^2 + y^2 = \frac{n^2}{4}; \quad 4x^2 + 4y^2 = p^2;$$

$$4x^2 + 16y^2 = m^2.$$



H.10

Khử x và y được : $p^2 = \dfrac{m^2 + n^2}{5}$.

Điều kiện để ΔMNP tồn tại là :

$$5(m + n)^2 > m^2 + n^2; \quad 5(m - n)^2 < m^2 + n^2.$$

Bất đẳng thức thứ nhất là hiển nhiên với mọi m, n. Ta biến đổi bất đẳng thức thứ hai : $m^2 - \dfrac{5}{2}mn + n^2 < 0$.

Giải ra được điều kiện : $\dfrac{1}{2} < \dfrac{m}{n} < 2$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *cho hai cạnh b và c của một tam giác. Tìm cạnh thứ ba x, biết rằng nó bằng đường cao hạ tới nó. Với điều kiện nào giữa b và c thì tam giác tồn tại ?*

Giải : Áp dụng biểu thức về diện tích tam giác ta có phương trình :

$$\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{\frac{b + c + x}{2} \cdot \frac{c + x - b}{2} \cdot \frac{x + b - c}{2} \cdot \frac{b + c - x}{2}}$$

Giải ra tìm được : $x^2 = \dfrac{1}{5}\left(b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{3b^2c^2 - b^4 - c^4}\right)$

với điều kiện là $3b^2c^2 \geq b^4 + c^4$ (1) tương đương với $b + c > x \geq |b - c|$;

dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 0, tức là khi b = c lấy với dấu trừ. Khi đó bài toán có nghiệm duy nhất là $x = \frac{2}{\sqrt{5}}b$.

Nếu b ≠ c thì tam giác chỉ tồn tại khi thỏa mãn điều kiện (1), tức là khi $\frac{2}{1+\sqrt{b}} \le \frac{b}{c} \le \frac{1+\sqrt{b}}{2}$ (2)

Vậy nếu b ≠ c thì tồn tại hai tam giác nếu cả hai thỏa mãn (2) với dấu <, và tồn tại một tam giác nếu với dấu =.

4. Nếu $\widehat{A} = 60^\circ$ thì hình chiếu AH của AC trên AB sẽ bằng nửa AC, tức là $AH = \frac{1}{2}AC$ (hình 11).

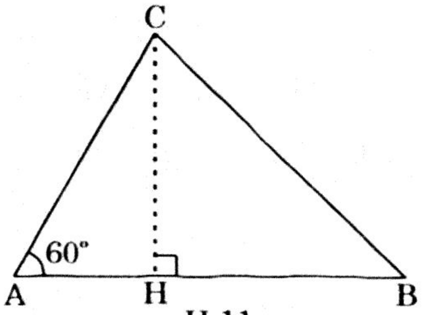
Ta có : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AH$

$= AB^2 + AC^2 - AC.AB$

hay $a^2 = c^2 + b^2 - bc$.

Đảo lại, nếu hệ thức này đúng thì :

$bc = AC.AB = 2AB.AH$



H.11

Như vậy hình chiếu AH của AC trên AB bằng $\frac{1}{2}AC$, do đó $\widehat{A} = 60^\circ$.

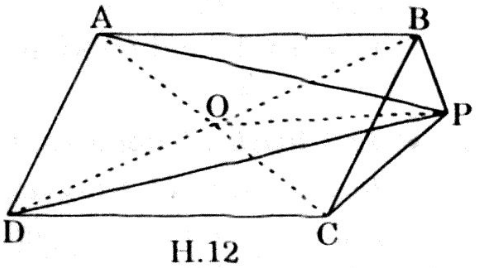
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Cho một điểm P bất kì ở ngoài hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng hiệu $(PA^2 + PC^2) - (PB^2 + PD^2)$ không đổi. Khi nào thì hiệu này âm, bằng 0 hoặc dương ?

Giải : Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành (hình 12). Nối P với O, A, B, C, D.

Trong ΔPAC ta có :

$$PA^2 + PC^2 = 2PO^2 + \frac{AC^2}{2}.$$



H.12

Trong ΔPBD ta có :

$$PB^2 + PD^2 = 2PO^2 + \frac{BD^2}{2}.$$

Từ đó ta được hiệu đã cho bằng :

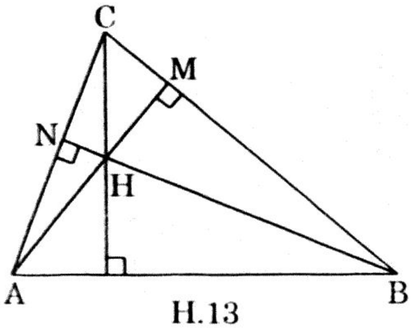
$$(PA^2 + PC^2) - (PB^2 + PD^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - BD^2).$$

Như vậy hiệu này không phụ thuộc vào vị trí của điểm P, do đó hiệu sẽ không đổi nếu hình bình hành không đổi.

Dấu của hiệu đã cho là dấu của $(AC^2 - BD^2)$, tức là :

- nếu AC > BD thì hiệu này dương;
- nếu AC < BD thì hiệu này âm;
- nếu AC = BD thì hiệu bằng 0. Trong trường hợp này hình bình hành cho trước là hình chữ nhật.

5. Xét $\Delta NHC \backsim \Delta ANB$ (hình 13) ta có :



H.13

$$\frac{CH}{AB} = \frac{NC}{NB} \quad \text{hay} \quad \frac{CH}{c} = \pm\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bh_b},$$

trong đó AB = c, BN = h_b và NC được xác định theo hệ thức :

$$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2b.NC$$

Vậy $CH = \pm\dfrac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2bh_b} = \pm\dfrac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{4S}$, trong đó $bh_b = 2S$.

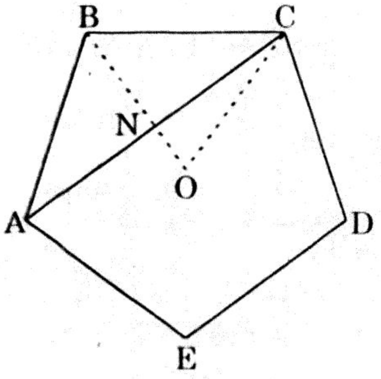
Tương tự ta tìm được AH và BH.

Lưu ý : Dấu (–) khi CH là khoảng cách từ trực tâm đến đỉnh của góc tù.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Tính các đường chéo của một ngũ giác đều cạnh a.

Giải : Đặt AC = x. Từ hai tam giác vuông BNC và ONC (hình 14) ta có



H.14

$$BN = \sqrt{BC^2 - NC^2}$$

$$ON = \sqrt{OC^2 - NC^2}$$

Nhưng BN + ON = R, tức là

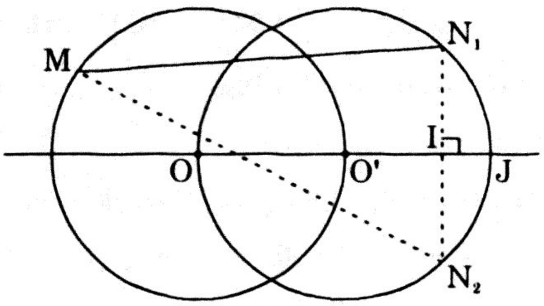
$$R = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} + \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Từ đó $a^4 = R^2(4a^2 - x^2)$ (1)

Ngoài ra ta biết rằng cạnh a_5 của ngũ giác đều tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là : $a_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{10}}$ (2)

Khử R từ (1) và (2) ta có ngay : $x = AC = \dfrac{a(5 + \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$.

6. Giả sử điểm M chạy trên đường tròn (O) và hai điểm N_1, N_2 trên đường tròn (O') đối xứng nhau qua đường nối tâm (hình 15). Gọi I là trung điểm đoạn N_1N_2, thế thì I nằm trên đường kính OJ của đường tròn (O').



H.15

Xét ΔMN_1N_2 theo hệ thức về trung tuyến ta có :

$$MN_1^2 + MN_2^2 = \frac{1}{2}N_1N_2^2 + 2MI^2 = 2(IN_1^2 + MI^2)$$

Nếu I nằm trên đoạn O'J thì rõ ràng $MI \geq IO'$. Nếu I nằm trên đoạn OO' thì ta vẫn có $MI \geq IO'$. Do đó :

$$MN_1^2 + MN_2^2 \geq 2(IN_1^2 + IO'^2) = 2O'N_1^2 = 2.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi điểm M đến vị trí O'.

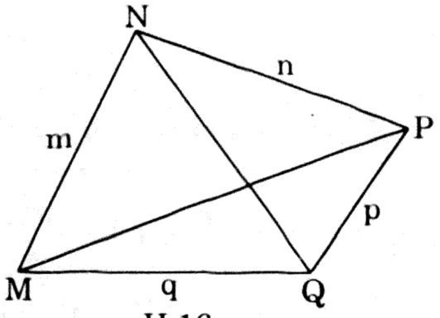
- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Cho tứ giác có diện tích S với các cạnh m, n, p, q. Chứng minh rằng :

$$S \leq \frac{m+p}{2}.\frac{n+q}{2}.$$

Giải : Ta xét trường hợp tứ giác đã cho là lồi.

Nếu tứ giác MNPQ lồi (hình 16), ta kẻ đường chéo NQ và có :



H.16

$$S = S_{MNQ} + S_{NPQ}$$

$$= \frac{1}{2}mq\sin M + \frac{1}{2}np\sin P$$

$$\leq \frac{1}{2}(mq + np) \qquad (1)$$

vì $mq\sin M \leq mq$ và $np\sin P \leq np$.

Tương tự nếu kẻ đường chéo MP ta sẽ được

$$S = S_{MNP} + S_{MPQ} \leq \frac{1}{2}(mn + pq) \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) được :

$$2S \leq \frac{1}{2}(m+p)(n+q) \qquad \text{hay} \qquad S \leq \frac{m+p}{2}.\frac{n+q}{2}.$$

7. Kéo dài trung tuyến BN một đoạn $ND = BN = m_b$ (hình 17).

a) Từ ΔABD ta có : $BD < AB + AD$ hay $2m_b < a + c$, tức là $m_b < \frac{a+c}{2}$.

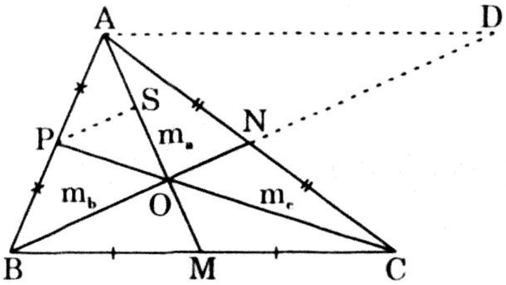
Tương tự : $m_c < \frac{b + a}{2}$, $m_a < \frac{c + b}{2}$.

Cộng các bất đẳng thức này được :

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c = 2p.$$

b) Từ ΔABO ta có : $AO + BO > AB$

hay $\frac{2}{3}(m_a + m_b) > c$, tức là



H.17

$$m_a + m_b > \frac{3}{2}c.\ \text{Tương tự : } m_b + m_c > \frac{3}{2}a,\ \ m_c + m_a > \frac{3}{2}b.$$

Cộng các bất đẳng thức này được :

$$2(m_a + m_b + m_c) > \frac{3}{2}(a + b + c)$$

hay $m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c) = \frac{3}{4}.2p$

Vậy $\frac{3}{4}.2p < m_a + m_b + m_c < 2p.$

- **Lời bình :** Tương tự, *cho m_a, m_b, m_c là ba trung tuyến của ΔABC, chứng minh bất đẳng thức kép :*

$$\frac{9}{20}(ab + bc + ca) < m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca).$$

Giải :

a) Trước hết ta chứng minh vế phải của bất đẳng thức kép. Từ bất đẳng thức $m_a + m_b + m_c < a + b + c$ (ở bài trên) ta suy ra :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) < a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Nhưng $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ nên từ bất đẳng thức trên suy ra :

$$2(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) < \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} + 2ab + 2ac + 2bc \qquad (*)$$

Biết rằng trong mọi tam giác ta đều có : $a > |b - c|$ nên :

$a^2 > b^2 + c^2 - 2bc$. Tương tự : $b^2 > a^2 + c^2 - 2ac$;

$c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$.

Như vậy : $2ab + 2ac + 2bc > a^2 + b^2 + c^2$

hay $\frac{ab + ac + bc}{2} > \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$.

Thay bất đẳng thức này vào (*) được :

$$m_am_b + m_bm_c + m_cm_a < \frac{5}{4}(ab + bc + ca).$$

b) Bây giờ ta chứng minh vế trái của bất đẳng thức kép.

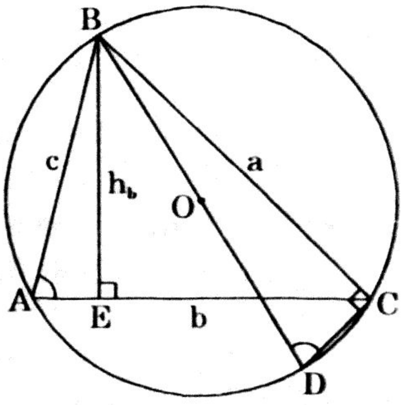
Kẻ PS // BN. Xét ΔPSO có độ dài ba cạnh là $\frac{1}{3}m_a$, $\frac{1}{3}m_b$, $\frac{1}{3}m_c$ và độ dài ba trung tuyến là $\frac{1}{4}a$, $\frac{1}{4}b$, $\frac{1}{4}c$.

Theo kết quả của câu a ở trên áp dụng vào tam giác này ta có :

$$\frac{1}{16}(ab + bc + ca) < \frac{5}{4}.\frac{1}{9}(m_am_b + m_bm_c + m_cm_a)$$

hay $$\frac{9}{20}(ab + bc + ca) < m_am_b + m_bm_c + m_cm_a.$$

8. Kẻ đường kính BD ta có ΔBCD vuông tại C (hình 18). Xét hai tam giác vuông $\Delta BCD \backsim \Delta ABE$ ($\widehat{A} = \widehat{D}$ vì cùng chắn cung BC), trong đó $BE = h_b$ là đường cao.



H.18

Ta có : $\dfrac{c}{h_b} = \dfrac{2R}{a}$,

trong đó $h_b = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$.

Vậy bán kính R bằng : $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}} = \dfrac{abc}{4S_\Delta}$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Tìm tỉ số diện tích ΔABC với ba cạnh a, b, c và diện tích tam giác mà ba cạnh là các trung tuyến m_a, m_b, m_c của tam giác ABC.

Giải : Ta tính diện tích S' của tam giác mà ba cạnh là m_a, m_b, m_c. Theo công thức Hê-rông ta có :

$$S' = \sqrt{\frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)\left[\frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c) - m_a\right].\left[\frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c) - m_b\right].\left[\frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c) - m_c\right]}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_a + m_c - m_b)(m_a + m_b - m_c)}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{M}$$

Diện tích tam giác đã cho được tính theo ba đường chéo của nó (xem bài a) ở trên) là : $S = \frac{1}{3}\sqrt{M}$. Do đó tỉ số : $\frac{S}{S'} = \frac{4}{3}$.

9. Gọi ba cạnh của tam giác đã cho là $2x - d$, $2x$ và $2x + d$ (d là công sai của cấp số cộng). Thế thì $2p = 6x$, $p = 3x$. Cạnh của tam giác đều $a_3 = 2x$ và diện tích của nó bằng $S = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3}$.

Diện tích của tam giác đã cho theo công thức Hê-rông là :

$$S' = \sqrt{3x(x+d)x(x-d)} = \sqrt{3x^2(x^2-d^2)}.$$

Theo bài ra : $S' = \frac{3}{5}S$ nên ta có : $\sqrt{3x^2(x^2-d^2)} = \frac{3}{5}x^2\sqrt{3}$

Giải ra được : $2x = \frac{5}{2}d$.

Từ đó : $a = 2x - d = 3.\frac{d}{2}$, $b = 5.\frac{d}{2}$, $c = 2x + d = 7.\frac{d}{2}$.

Vậy $a : b : c = 3 : 5 : 7$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Tìm diện tích của tam giác ABC theo ba đường cao h_a, h_b, h_c của nó.

Giải : Ta có diện tích của ΔABC là : $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ (1)

và $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (2)

Biết rằng $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, ta biểu thị các cạnh của tam giác từ (1) theo S và thay chúng vào công thức (2) sẽ tìm được :

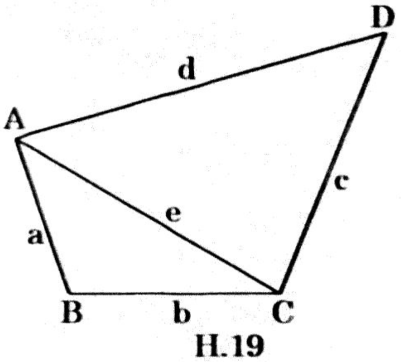
$$S = S^2.\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}$$

dạng $S = S^2.M$. Từ đó ta có : $S = \frac{1}{M}$.

10. Kẻ đường chéo AC của tứ giác ABCD có diện tích S và chu vi $P = a + b + c + d$ (hình 19) ta được hai tam giác ACD và ACB.

Giả sử $S_{ACD} = s \geq S_{ACB}$, ta có : $s \geq \frac{1}{2}S$ (1)

Trong ΔACD nội tiếp một đường tròn bán kính r thì $s = pr$ (2)



H.19

(p là nửa chu vi ΔACD), tức là $p = \dfrac{c+d+e}{2}$.

Do $c < a + b$ nên $p = \dfrac{c+d+e}{2} < \dfrac{a+b+c+d}{2} = \dfrac{P}{2}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $r = \dfrac{s}{p} > \dfrac{\frac{1}{2}S}{\frac{1}{2}P}$ hay $r > \dfrac{S}{P}$.

- ***Lời bình :*** Giải bằng lượng giác bài toán sau :

Tìm diện tích của một tam giác biết hai cạnh a, b và phân giác l của góc giữa hai cạnh đó.

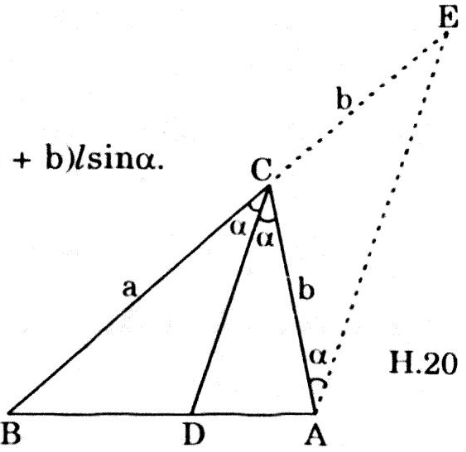
Giải : Đặt $\widehat{BCA} = 2\alpha$.

Diện tích $S_{ABC} = S_{BCD} + S_{DCA}$ (hình 20)

$$\text{hay } S = \frac{1}{2}al\sin\alpha + \frac{1}{2}lb\sin\alpha = \frac{1}{2}(a+b)l\sin\alpha.$$

Qua A kẻ AE song song với phân giác CD cắt BC kéo dài tại E. Ta có CE = b và AE = $2b\cos\alpha$.

Nhưng $\dfrac{CD}{AE} = \dfrac{BC}{BE}$, từ đó $AE = \dfrac{(a+b)l}{a}$.



H.20

Lại có $\cos\alpha = \dfrac{(a+b)l}{2ab}$ và $\sin\alpha = \dfrac{1}{2ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2l^2}$

Vậy $S = \dfrac{(a+b)l}{4ab}\sqrt{4a^2b^2 - (a+b)^2l^2}$.

* *Bị chú* : Nếu giải bằng hình học thì khi đã biết hai cạnh a, b ta tìm cạnh thứ ba c rồi áp dụng công thức Hê-rông.

11. Gọi S là diện tích tam giác ta có : $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

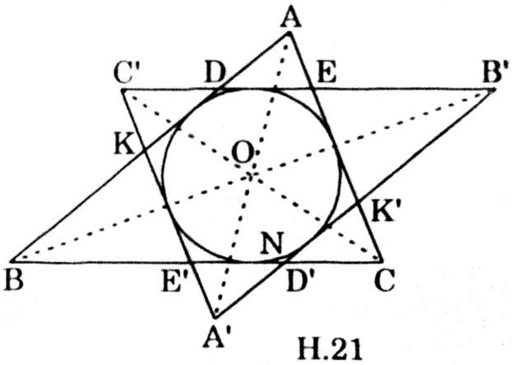
Mặt khác theo bài ra : $h_c = h_a + h_b$. Do đó ta có ngay độ dài cạnh c là

$$c = \frac{2S}{h_a + h_b}.$$

Thay $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$ ta tìm được $c = \dfrac{ab}{a+b}$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Cho hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng nhau qua tâm đường tròn nội tiếp chung bán kính r. Chứng minh rằng : Tích diện tích của hai *tam giác ABC, A'B'C' và 6 tam giác tạo thành do các cạnh của hai tam giác ABC, A'B'C' cắt nhau có giá trị bằng* r^{16}.



H.21

Giải : Do hai tam giác ABC và A'B'C' đối xứng nhau qua tâm O của đường tròn nội tiếp chung nên các điểm tương ứng của hai tam giác này nằm trên đường thẳng qua O và cách O những đoạn bằng nhau (hình 21).

Ta có : OC = OC', OB = OB', suy ra tứ giác BCB'C' là hình bình hành.

Tương tự AC = A'C', AB = A'B' và ΔABC = ΔA'B'C'.

Xét các hình bình hành ABA'B', BDB'D', ACA'C' và ECE'C' ta có :

AD = A'D', AE = A'E' và do $\widehat{A} = \widehat{A'}$ nên

ΔB'EK' = ΔBE'K và ΔDC'K = ΔD'CK'.

Gọi S là diện tích ΔABC, S_1 là diện tích ΔADE, S_2 là diện tích ΔDC'K và S_3 là diện tích ΔKBE'. Lại gọi thêm h_a, h_b, h_c là các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C ta có :

$$S = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Kẻ đường cao AM của ΔADE và đường cao AN của ΔABC ta có :

$$S_1 = \frac{1}{2}DE.AM.$$

Xét ΔABC ∽ ΔADE ta tìm được :

$$DE = \frac{a(h_a - 2r)}{h_a}, \quad AM = h_a - 2r.$$

Từ đó : $$S_1 = \frac{a(h_a - 2r)^2}{2h_a} = \frac{a\left(\frac{2pr}{a} - 2r\right)^2}{2h_a} = \frac{r^2(p-a)^2}{S}$$

Tương tự : $$S_2 = \frac{r^2(p-c)^2}{S} \quad \text{và} \quad S_3 = \frac{r^2(p-b)^2}{S}.$$

Áp dụng công thức Hê-rông được :

$$S^2S_1^2S_2^2S_3^2 = \frac{r^{12}(p-a)^4(p-b)^4(p-c)^4.S^2}{S^6} = r^{12}.\frac{S^4}{p^4} = r^{16}.$$

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Công thức truy hồi với tam giác mà số đo ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp

Tam giác đầu tiên là tam giác có ba cạnh là 1, 2, 3 và diện tích S = 0, **ta có bảng sau :**

Cạnh tam giác $a < b < c$	Diện tích tam giác S	Giá trị trung bình các cạnh
1, 2, 3	$S_1 = 0$	$b_1 = \frac{1+2+3}{3} = 2$
3, 4, 5	$S_2 = 6$	$b_2 = 4$
13, 14, 15	$S_3 = 84$	$b_3 = 14$
....	....	....

Các số $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ ... và $S_1, S_2, S_3, ..., S_n$ ... thỏa mãn hệ thức truy **hồi :**

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{b_{n+1}} = 4 \quad \text{và} \quad \frac{S_n + S_{n+2}}{S_{n+1}} = 4.$$

Với hai công thức này ta có thể tiếp tục bảng nói trên một cách nhanh chóng bằng tính toán :

$b_4 = 4b_3 - b_2 = 4.14 - 4 = 52$ (cạnh tam giác là 51, 52, 53)

$S_4 = 14S_3 - S_2 = 14.84 - 6 = 1170$ (đơn giản hơn công thức Hê-rông)

$b_5 = 4b_4 - b_3 = 4.52 - 14 = 194$ (cạnh tam giác là 193, 194, 195)

$S_5 = 14S_4 - S_3 = 14.1170 - 84 = 16296$, v.v...

....	....	....
51 52 53	$S_4 = 1170$	$b_4 = 52$
193 194 195	$S_5 = 16296$	$b_4 = 194$
723 724 725	$S_6 = 226974$	$b_6 = 724$
2701 2702 2703	$S_7 = 3161340$	$b_7 = 2702$
10083 10084 10085	$S_8 = 44031786$	$b_8 = 10084$
....	....	....

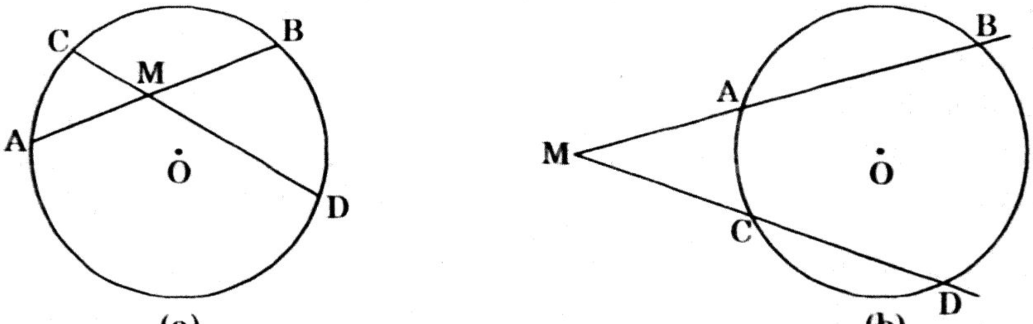
§11. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN PHƯƠNG TÍCH

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1.a) Nếu hai dây AB và CD cắt nhau tại một điểm M ở trong (hoặc ở ngoài) một đường tròn thì ta có (hình 22a và 22b) :

$$MA.MB = MC.MD$$

Đảo lại, nếu ta có hệ thức MA.MB = MC.MD thì bốn điểm A, B, C, D nằm trên một đường tròn.



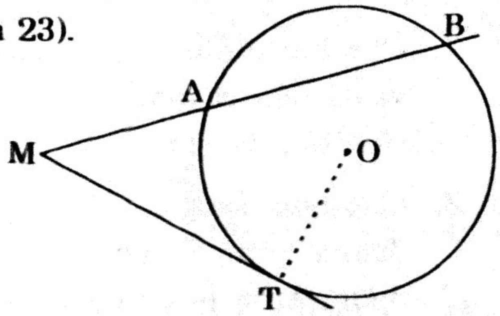
(a) (b)

H.22

b) Nếu MAB là cát tuyến và MT là tiếp tuyến với đường tròn thì ta có :

$$MA.MB = MT^2 \quad \text{(hình 23).}$$

Đảo lại, nếu ta có $MA.MB = MT^2$ trong đó M, A, B thẳng hàng và T ở ngoài đường thẳng MAB thì MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔABT.



H.23

2. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

a) Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O; R) là đại lượng $d^2 - R^2$ (d = OM) kí hiệu : $\mathscr{P}_M(O) = d^2 - R^2$.

Nếu M nằm ngoài đường tròn thì $\mathscr{P}_M(O) > 0$, nằm trên đường tròn thì $\mathscr{P}_M(O) = 0$ và nằm trong đường tròn thì $\mathscr{P}_M(O) < 0$.

b) Quỹ tích những điểm M có cùng phương tích với hai đường tròn (O; R) và (O'; R') là đường thẳng vuông góc với đường thẳng nối tâm OO' tại điểm H trong đó $HI = \dfrac{R^2 - R'^2}{2OO'}$ (I là trung điểm của OO').

Đường thẳng này gọi là *trục đẳng phương* của (O) và (O').

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 = \text{hằng số.}$$

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Cho hai đường tròn tâm O và O', bán kính R và R' ngoại tiếp nhau. Một tiếp tuyến chung BB' cắt OO' tại M. Tính các đoạn MO, MO', MB, MB' và BB'.

2. Một đường tròn thay đổi đi qua hai điểm cố định A và B và cắt một đường tròn khác tại C và D. Chứng minh rằng CD đi qua một điểm cố định.

3. Cho đường tròn tâm O và dây cung KL. Gọi M là trung điểm của cung nhỏ KL. Kẻ các dây MN, MP theo thứ tự cắt KL tại E và F.

   a) Chứng minh hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác KNM và KPF tiếp xúc nhau.

   b) Chứng minh tứ giác MPFE nội tiếp.

4. Chứng minh rằng với mọi tam giác ta có hệ thức : $d^2 = R^2 - 2Rr$, trong đó d là khoảng cách giữa tâm O của đường tròn ngoại tiếp và tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác, R và r theo thứ tự là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp (*công thức Ơle* đối với tam giác).

5. Cho hai đoạn thẳng AB và CD. Tìm điểm P sao cho $\widehat{APB} = \widehat{CPD}$ và các tam giác BPA và CPD đồng dạng.

6. Cho đường tròn bán kính r và hai dây cung AB, BC dài a và b. Tính tổng (hiệu) của hai cung đó.

7. Cho hai điểm cố định A và B và một đường tròn thay đổi. Mỗi điểm A và B đều có phương tích không đổi đối với đường tròn này. Tìm quỹ tích tâm O của đường tròn.

8. Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự ấy trên một đường thẳng d. Một đường tròn đi qua A và B, một đường tròn khác đi qua C và D, hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại M. Tìm quỹ tích tiếp điểm M.

9. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; r) ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung ngoài AA', BB' và các tiếp tuyến chung trong CC', DD'. Gọi I, J, K, L theo thứ tự là trung điểm của AA', BB', CC', DD'. Chứng minh bốn điểm I, J, K, L thẳng hàng.

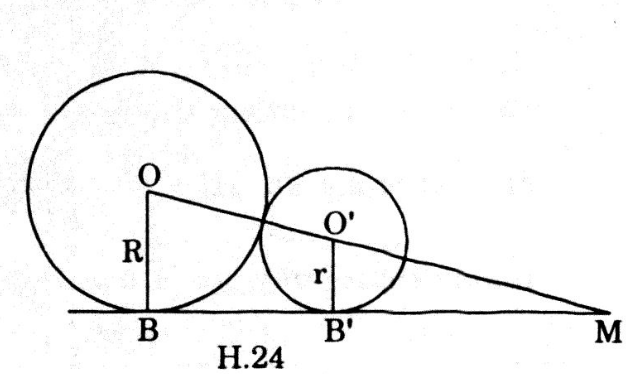
C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Ta có (hình 24) :

$$\frac{MO}{R} = \frac{MO'}{r} = \frac{MO - MO'}{R - r} = \frac{R + r}{R - r}.$$

Từ đó :

$$MO' = r.\frac{R + r}{R - r}, \quad MO = R.\frac{R + r}{R - r}.$$



H.24

Phương tích của điểm M đối với đường tròn (O) là :

$$MB^2 = MO^2 - R^2 = \frac{4R^2Rr}{(R-r)^2}, \text{ từ đó } MB = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}.$$

Tương tự ta có : $MB' = \dfrac{2r\sqrt{Rr}}{R-r}$.

Suy ra : $BB' = MB - MB' = \dfrac{2\sqrt{Rr}(R-r)}{R-r} = 2\sqrt{Rr}$.

Lưu ý : Ta có thể tính BB' bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông :

$BB'^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$, rồi tính MB, MB' theo $\dfrac{MB}{R} = \dfrac{MB'}{r} = \dfrac{BB'}{R-r}$.

Hoặc tính MB theo tam giác vuông MBO và MB' theo tam giác vuông MB'O', sau đó tính BB' = MB – MB'.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *qua điểm P của dây cung AB của hai đường tròn giao nhau, ta kẻ dây cung CD trong đường tròn thứ nhất và dây cung EF trong đường tròn thứ hai. Chứng minh : PC.PD = PE.PF.*

Giải : Trong đường tròn (O) ta có (hình 25) :

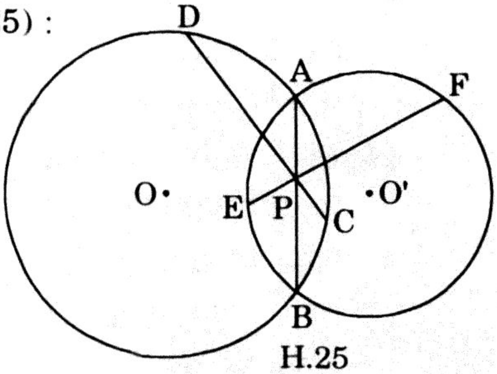
PA.PB = PC.PD

Trong đường tròn (O') ta có :

PA.PB = PE.PF

Từ hai đẳng thức trên, suy ra :

PC.PD = PE.PF.



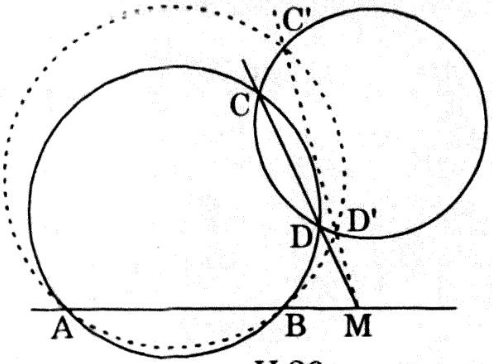
H.25

2. Giả sử có một đường tròn bất kì đi qua A và B cố định cắt đường tròn cố định tại C và D (hình 26). Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M. Ta có : MA.MB = MC.MD.

Qua M kẻ một cát tuyến bất kì C'D' của đường tròn cố định, ta sẽ có :

MC'.MD' = MC.MD.

Hệ thức cuối này chứng tỏ rằng bốn điểm A, B, C', D' cùng nằm trên một đường tròn. Như vậy CD bao giờ cũng đi qua một điểm M cố định trên đường thẳng AB.



H.26

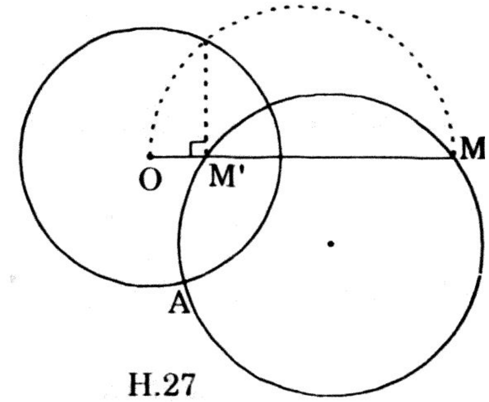
Bài toán sẽ không có lời giải nếu A và B cách đều tâm đường tròn cố định, vì lúc đó AB và CD song song với nhau nên điểm M không xác định được.

- ***Lời bình :*** Tương tự, ta có bài toán sau :

Cho một đường tròn tâm O, điểm A trên đường tròn và một điểm ***M****. Dựng một đường tròn qua* ***M*** *và trực giao với đường tròn (O) tại A.*

Giải : Đây là một bài toán dựng hình nên phải qua bốn bước sau đây :

a) *Phân tích* : Giả sử ta dựng được đường tròn trực giao với (O) tại A và đi qua M (hình 27). Đường tròn này sẽ tiếp xúc với OA và cắt đường thẳng OM tại M'. Ta có : $OA^2 = OM.OM'$ (M và M' cùng phía đối với O), do đã biết OA, OM nên ta xác định được M' một cách dễ dàng.



H.27

b) *Cách dựng* :

– Dựng trên nửa đường thẳng OM một đoạn OM' sao cho

$$OA^2 = OM.OM'.$$

– Dựng đường tròn đi qua A, M và M'. Đó là đường tròn phải tìm.

c) *Chứng minh :* Theo cách dựng thì OA phải tiếp xúc với đường tròn (A, M, M') tại A, do đó đường tròn này và đường tròn (O) trực giao tại A.

d) *Biện luận* : Bao giờ cũng tìm được một điểm M' duy nhất, nên bài toán bao giờ cũng có một nghiệm hình duy nhất.

Nếu M cũng nằm trên đường tròn (O) thì M' trùng với M và đường tròn phải dựng tiếp xúc với OA và OM tại A và M.

Nếu M, A và M' thẳng hàng thì đường tròn phải dựng suy biến thành đường thẳng đi qua tâm của đường tròn (O).

3. a) Xét hai tam giác KMN và EMK có góc M chung và $\widehat{K} = \widehat{N}$ (do M là trung điểm cung nhỏ KL) nên (hình 28) : $\Delta KMN \backsim \Delta EMK$.

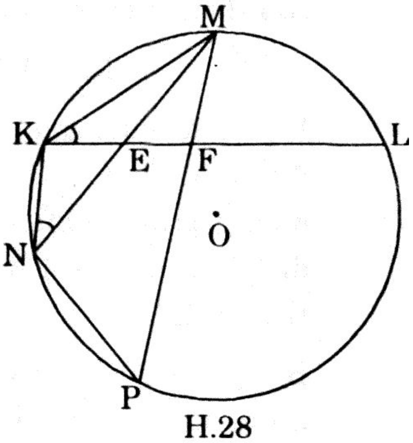
Do đó : $\dfrac{KM}{MN} = \dfrac{EM}{KM}$.

Suy ra : $KM^2 = ME.MN$.

Hệ thức này chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp ΔKMN tiếp xúc với MK tại K.

Tương tự, ta chứng minh được đường tròn ngoại tiếp ΔKFP cũng tiếp xúc với MK tại K.

Vậy hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác KMN và KFP tiếp xúc nhau tại K.



H.28

b) Do câu a) ta có hệ thức : ME.MN = MF.MP (vì cùng bằng MK^2).

Vậy tứ giác MPFE nội tiếp.

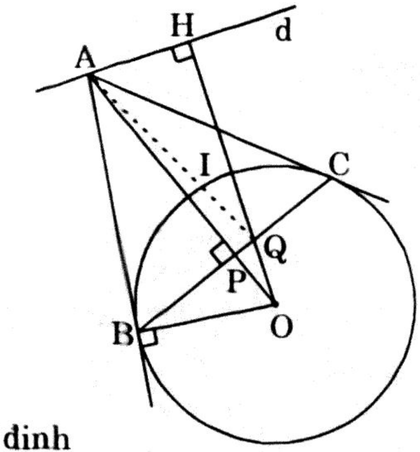
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Cho đường thẳng d cố định và điểm A trên d. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với một đường tròn cố định (O; R) không cắt d. Chứng minh rằng khi A chạy trên d thì đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải : Kẻ OH ⊥ d. Gọi P là giao điểm của OA với BC (hình 29). Ta có OA ⊥ BC (theo tính chất hai tiếp tuyến phát xuất từ A). Gọi Q là giao điểm của OH với BC.

Ta có tứ giác APQH nội tiếp trong đường tròn tâm I đường kính AQ, do đó : Phương tích của điểm O đối với đường tròn (I) là :

$$\mathscr{P}_O(I) = OP.OA = OQ.OH \qquad (1)$$



H.29

Xét tam giác vuông ABO ta có :

$$OP.OA = OB^2 = R^2 \qquad (2)$$

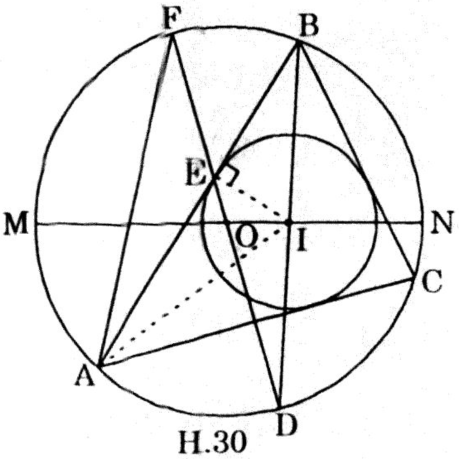
Từ (1) và (2) suy ra : $OQ.OH = R^2$.

Từ đó : $OQ = \dfrac{R^2}{OH}$ = không đổi.

Mà O và H cố định nên Q cũng cố định.

Vậy đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định là giao điểm Q của OH và BC.

4. Gọi O và I là tâm các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC và D là trung điểm cung AC (hình 30).



H.30

Mỗi một góc IAD và AID bằng $\frac{1}{2}$ tổng các góc ở đỉnh A và B của ΔABC.

Suy ra ID = AD.

Theo hệ thức lượng trong đường tròn ta có : MI.IN = BI.ID.

Ngoài ra do IE ⊥ AB và FD là đường kính nên ΔBIE ∽ ΔFDA.

Do đó : BI.AD = IE.FD hay do AD = ID nên :

BI.ID = IE.FD. Suy ra : MI.IN = IE.FD.

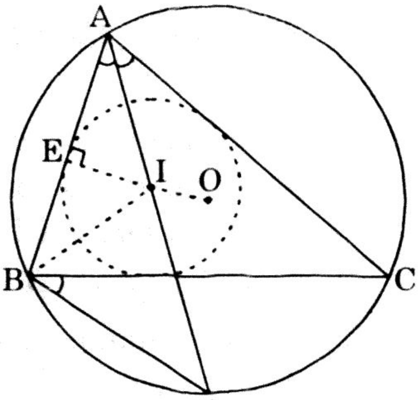
Trong đẳng thức cuối này ta thay MI = R + d, IN = R − d (d = OI), IE = r, FD = 2R sẽ được :

$$R^2 - d^2 = 2Rr \quad \text{hay} \quad d^2 = R^2 - 2Rr.$$

- ***Lời bình :***

a) Có thể *chứng minh công thức trên bằng cách áp dụng định lì hàm số sin* như sau :

Giải : Phân giác trong của góc A cắt đường tròn ngoại tiếp (O) tại D (hình 31).



H.31

Ta có : $\widehat{IBD} = \widehat{BID}$ (vì cùng bằng $\dfrac{A+B}{2}$; với I là tâm đường tròn nội tiếp).

Suy ra : DB = DI (1)

Ta có phương tích của I đối với (O) là :

$$IA.ID = R^2 - IO^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$IA.ID = R^2 - d^2 \qquad (3)$$

Xét ΔIAE vuông tại E ta có : $IA = \dfrac{IE}{\sin\dfrac{A}{2}} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$.

Theo định lí hàm số sin trong ΔDBA thì :

$$BD = 2R\sin\widehat{BAD} = 2R\sin\frac{A}{2}.$$

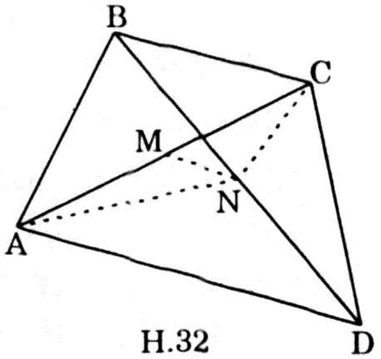
Thay giá trị của IA và của BD vào (3) được :

$$R^2 - d^2 = 2Rr \quad \text{hay} \quad d^2 = R^2 - 2Rr.$$

b) *Ta còn có công thức Ơle cho tứ giác* như sau :

Cho tứ giác ABCD với AB = a, BC = b, DA = d, AC = e, BD = f. Gọi M và N là trung điểm hai đường chéo AC và BD. Hãy chứng minh công thức Ơle cho tứ giác :

$$MN^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$



H.32

Giải : Xét trung tuyến MN trong ΔNAC ta có :

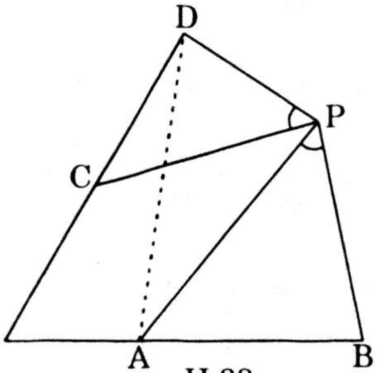
$$MN^2 = \frac{2NC^2 + 2NA^2 - AC^2}{4} \quad \text{(hình 32).}$$

Từ công thức này xét các tam giác ABD và BCD ta lại có :

$$MN^2 = \frac{1}{2}\left(2.\frac{2BC^2 + 2CD^2 - BD^2}{4} + 2.\frac{2AB^2 + 2AD^2 - BD^2}{4} - AC^2\right)$$

hay $MN^2 = \dfrac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)$.

5. Giả sử P là điểm phải tìm, ta có : $\frac{PC}{PB} = \frac{PD}{PA} = \frac{CD}{AB} = k$ (hình 33).



H.33

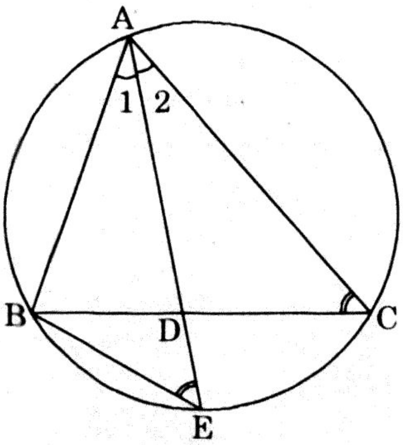
Do B, C cố định nên xét tỉ số $\frac{PC}{PB} = k$, ta có P là điểm nằm trên đường tròn Apôlôniut mà đường kính là đoạn nối các điểm chia trong và chia ngoài đoạn BC theo tỉ số $k = \frac{CD}{AB}$.

Tương tự, xét tỉ số $\frac{PD}{PA} = k$ ta có điểm P nằm trên đường tròn Apôlôniut mà đường kính là đoạn nối các điểm chia trong và chia ngoài đoạn AD theo tỉ số k.

Vậy điểm P phải tìm là giao điểm của hai đường tròn trên.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng bình phương phân giác của góc ở đỉnh một tam giác bằng hiệu giữa tích hai cạnh bên và tích hai đoạn trên đáy.



H.34

Giải : Xét ΔABC có phân giác góc A chia cạnh BC = a thành hai đoạn BD = c', DC = b' (hình 34).

Ta phải chứng minh rằng : $AD^2 = bc - b'c'$.

Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔABC rồi kéo dài phân giác AD cắt đường tròn này tại E. Nối E với B.

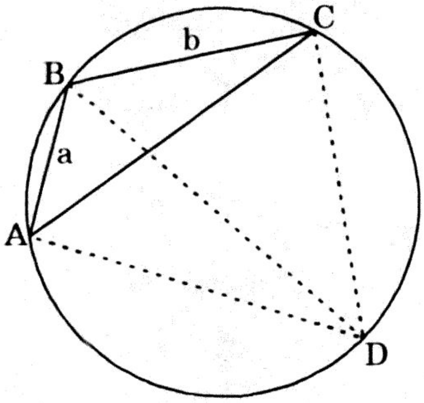
Xét hai tam giác ΔABE ∽ ΔADC (vì $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ và $\hat{C} = \hat{E}$) ta có :

$$\frac{AD}{c} = \frac{b}{AD + DE} \quad \text{hay} \quad AD^2 + AD.DE = bc \qquad (1)$$

Nhưng $AD.DE = b'c'$ (2) vì là tích hai dây cắt nhau tại D.

Vậy từ hai đẳng thức (1) và (2) ta có ngay : $AD^2 = bc - b'c'$.

6. Ta thấy rằng dây AC trương cung AB và AC, tức là đoạn a + b (hình 35). Theo định lí Ptôlêmê ta có :



H.35

$$AC.BD = a.CD + b.AD$$

hay $AC.2r = a\sqrt{4r^2 - b^2} + b\sqrt{4r^2 - a^2}$

vì $BD = 2r$, $CD = \sqrt{(2r)^2 - b^2}$,

$$AD = \sqrt{(2r)^2 - a^2}.$$

Đặt AC = x, sau khi biến đổi ta tìm được :

$$x = a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}} + b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}}$$

Tương tự, đối với hiệu hai dây a – b ta có :

$$z = a\sqrt{1-\frac{b^2}{4r^2}} - b\sqrt{1-\frac{a^2}{4r^2}} \qquad (a > b).$$

Lưu ý : Công thức tìm được sẽ đơn giản hơn nếu ta lấy r = 1.

- ***Lời bình :*** *Áp dụng công thức trên và lấy r = 1, hãy tìm cạnh của đa giác đều 15 cạnh nội tiếp.*

Giải : Ta biết rằng cạnh của đa giác đều 15 cạnh nội tiếp bằng hiệu các dây trương cung của các cạnh hình lục giác đều và đa giác đều 10 cạnh, tức là : $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

$$\text{Từ đó ta có : } a_{15} = a_6\sqrt{1-\frac{a_{10}^2}{4}} - a_{10}\sqrt{1-\frac{a_6^2}{4}}$$

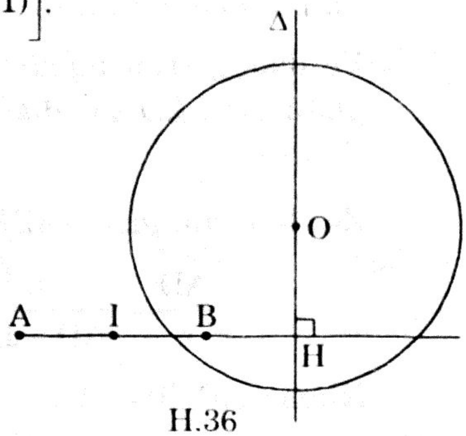
$$= \sqrt{1-\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4.4}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}.\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$

$$\text{hay } a_{15} = \frac{1}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right].$$

7. Giả sử A và B (hình 36) có phương tích đối với đường tròn (O; R) và $\mathscr{P}_A(O) > \mathscr{P}_B(O)$. Ta có :

$$\mathscr{P}_A = OA^2 - R^2, \quad \mathscr{P}_B = OB^2 - R^2.$$

Suy ra : $OA^2 - OB^2 = \mathscr{P}_A - \mathscr{P}_B$, mà các phương tích có giá trị không đổi nên hiệu $OA^2 - OB^2$ cũng không đổi.



H.36

Vậy điểm O nằm trên đường thẳng Δ ⊥ AB quỹ tích những điểm mà hiệu bình phương các khoảng cách đến A và B bằng $\mathscr{P}_A - \mathscr{P}_B$.

Đảo lại, mọi đường tròn (O'; R') có tâm nằm trên đường thẳng này đều cho ta :

$$O'A^2 - O'B^2 = \mathscr{P}_A - \mathscr{P}_B \quad \text{hay} \quad O'A^2 - \mathscr{P}_A = O'B^2 - \mathscr{P}_B = R'^2.$$

Từ đó suy ra : $\mathscr{P}_A = O'A^2 - R'^2$ và $\mathscr{P}_B = O'B^2 - R'^2$.

Như vậy, A và B đều có phương tích không đổi đối với mọi đường tròn tâm O' nằm trên đường thẳng Δ.

Kết luận : Quỹ tích điểm O là đường thẳng vuông góc với AB tại điểm H cách trung điểm I của AB một đoạn $IH = \dfrac{\mathcal{P}_A - \mathcal{P}_B}{2AB}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *cho ba điểm A, B, C thẳng hàng và một đường tròn thay đổi đi qua A và B. Nối C với trung điểm I của cung AB cắt đường tròn tại M. Tìm quỹ tích của M.*

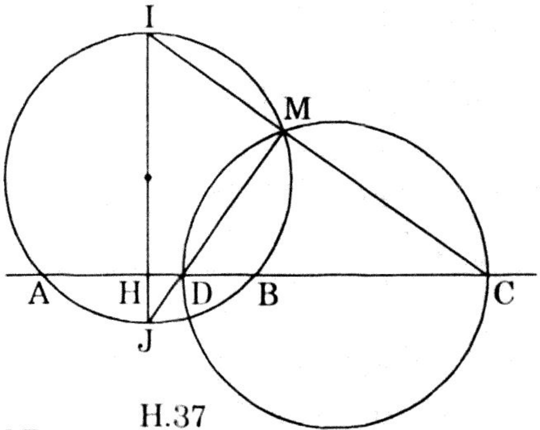
Giải : Gọi CBA và CMI là hai cát tuyến của đường tròn bất kì qua A và B (hình 37).

Ta có : $CA.CB = CI.CM$ (1)

Kẻ đường kính IJ gặp AB tại H, ta có : $IH \perp AB$. Nối MJ gặp AB tại D ta được $\widehat{IMJ} = 90^\circ$.

Tứ giác IMDH có hai góc đối đều vuông nên nội tiếp được.

Từ đó có : $CH.CD = CI.CM$ (2)



H.37

So sánh (1) và (2) được : $CH.CD = CA.CB$.

Các đoạn CA, CB, CH đều không đổi, nên CD cũng không đổi và điểm D phải cố định.

Điểm M nhìn đoạn CD cố định dưới một góc vuông nên nằm trên đường tròn đường kính CD.

Đảo lại, trên đường tròn này ta lấy một điểm M' bất kì. Nối CM' gặp trung trực của AB tại I' (trung trực này đi qua H). Ta chứng minh rằng I' nằm trên đường tròn đi qua A, B và M'.

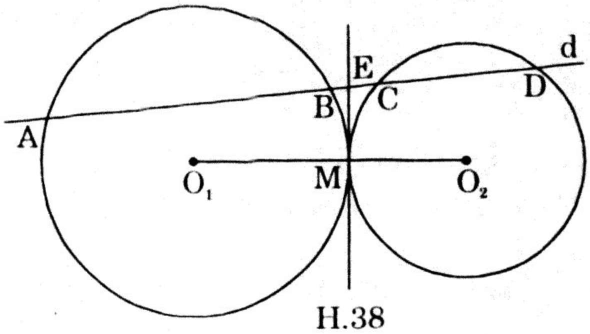
Thật vậy, tứ giác I'M'DH nội tiếp được (vì các góc M' và H đều vuông) nên : $CI.CM' = CH.CD$, mà $CA.CB = CH.CD$, do đó $CI'.CM' = CA.CB$.

Đẳng thức cuối này chứng tỏ I' cũng ở trên đường tròn (A, B, M').

Vậy : Quỹ tích của M là đường tròn đường kính CD, trong đó D là điểm điều hòa của C đối với A và B (MI và MC là các phân giác của ΔAMB phát xuất từ M).

8. Gọi M là tiếp điểm của hai đường tròn (O_1) và (O_2), và E là giao điểm của đường thẳng d với tiếp tuyến chung qua M (hình 38).

Ta có : $EA.EB = EM^2 = EC.ED$.



H.38

Đẳng thức này chứng tỏ E chia ngoài các đoạn AB và CD theo cùng một tỉ số. Do đó E là điểm cố định và $EM^2 = EA.EB = EC.ED$ = không đổi.

Vậy tiếp điểm M phải nằm trên đường tròn tâm E bán kính

$$EM = \sqrt{EA.EB}.$$

Đảo lại, lấy điểm M' tùy ý (không nằm trên d) trên đường tròn (E), ta phải chứng minh M' là tiếp điểm của hai đường tròn (O'_1) và (O'_2).

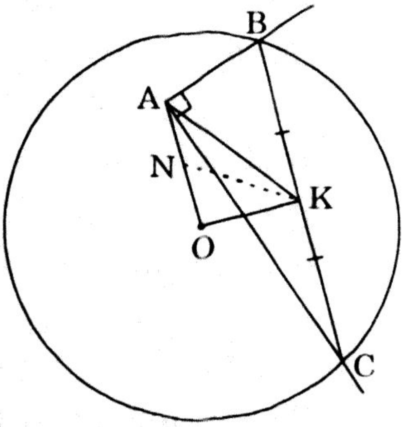
Thật vậy, qua M' dựng đường thẳng ⊥ EM' cắt các trung trực của AB và CD tại O'_1 và O'_2. Vì $EM'^2 = EA.EB = EC.ED$ nên ba điểm M', A, B nằm trên đường tròn (O'_1), ba điểm M', C, D nằm trên đường tròn (O'_2) và M' là tiếp điểm.

Tóm lại, quỹ tích tiếp điểm M của hai đường tròn (O_1) và (O_2) là đường tròn tâm E bán kính $EM = \sqrt{EA.EB} = \sqrt{EC.ED}$, trừ hai giao điểm của đường tròn (E) với đường thẳng d.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *cho đường tròn tâm O và một điểm A trong đường tròn. Xét tất cả góc vuông đỉnh A và hai cạnh cắt đường tròn tại B và C. Tìm quỹ tích trung điểm K của dây BC.*

Giải : Gọi N là trung điểm của đoạn AO. Áp dụng định lí hàm số côsin cho các tam giác ANK và ONK ta tính được độ dài trung tuyến KN là (hình 39) :

$$KN^2 = \frac{1}{2}(KA^2 + KO^2) - \frac{1}{4}AO^2 \quad (*)$$



H.39

Theo phương tích của điểm K đối với đường tròn (O), ta có :

$$KB.KC = R^2 - KO^2 \quad \text{với} \quad KB = KC = KA$$

hay $KA^2 = R^2 - KO^2$, suy ra $KA^2 + KO^2 = R^2$.

Thay vào (*) được :

$$KN^2 = \frac{R^2}{2} - \frac{m^2}{4} = \text{không đổi (với AO = m cố định).}$$

Điểm N cố định nên điểm K chạy trên đường tròn bán kính

$$NK = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - m^2}.$$

Đảo lại, lấy điểm K' tùy ý trên đường tròn bán kính NK, ta phải chứng minh rằng K' là trung điểm của dây B'C' (với B'A ⊥ C'A).

Thật vậy, ta có $NK' = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - m^2}$. Ta vẽ cung bán kính K'A tâm K' cắt đường tròn (O) tại B', được K'A = K'B'. Kéo dài B'K' cắt (O) tại C'.

Xét ΔK'AO với trung tuyến K'N ta có :

$$K'A^2 + K'O^2 = \frac{1}{2}(AO^2 + 4K'N^2) = \frac{1}{2}\left[m^2 + (2R^2 - m^2)\right] = R^2.$$

Như thế : $K'A^2 + K'O^2 = R^2 = OB'^2$ hay $K'B'^2 + K'O^2 = OB'^2$, chứng tỏ $\Delta OK'B'$ vuông tại K'. Do đó K' là trung điểm của B'C' tức là $K'B' = K'C' = K'A$ và $\Delta B'AC'$ vuông tại A.

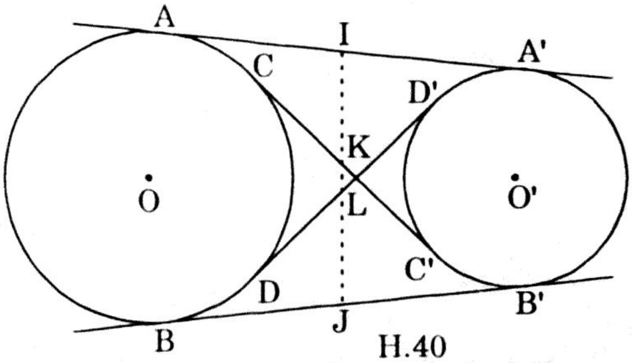
Tóm lại, quỹ tích trung điểm K của dây BC với $BA \perp CA$ là đường tròn tâm N bán kính bằng $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - m^2}$.

9. Do IA và IA' là tiếp tuyến với các đường tròn (O; R) và (O'; r) (hình 40) nên ta có :

$$\mathscr{P}_I(O) = IA^2, \quad \mathscr{P}_I(O') = IA'^2$$

Vì IA = IA' (gt) suy ra :

$$\mathscr{P}_I(O) = \mathscr{P}_I(O').$$



H.40

Như vậy I thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (O) và (O').

Tương tự ta có J, K, L cũng thuộc trục đẳng phương trên. Vậy bốn điểm I, J, K, L thẳng hàng.

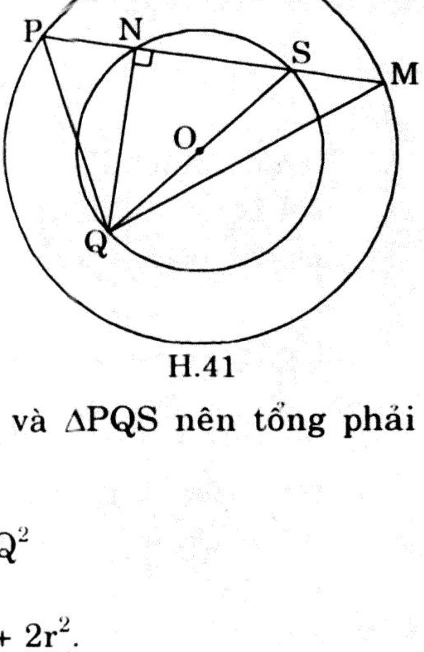
- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r), điểm M chạy trên (O) và điểm N chạy trên (O'). MN cắt (O) tại P, đường vuông góc với NM tại N cắt (O') tại Q. Tính theo R và r biểu thức $MP^2 + PQ^2 + QP^2$.

Giải : Ta có : $MP^2 = (MS + SP)^2 = MS^2 + SP^2 + 2MS.SP$ (hình 41).

Nhưng MS.SP chính là phương tích của điểm S đối với đường tròn (O; R) nên :

$$MS.SP = R^2 - d^2 = R^2 - r^2.$$



H.41

Thay vào MP^2 được :

$$MP^2 = MS^2 + SP^2 = 2(R^2 - r^2).$$

Như thế tổng $MP^2 + PQ^2 + QP^2$ phải tìm có thể viết :

$$2(R^2 - r^2) + MS^2 + MQ^2 + QP^2,$$

hay do MO và PO là trung tuyến của ΔMQS và ΔPQS nên tổng phải tìm bằng :

$$2(R^2 - r^2) + 2SO^2 + \frac{1}{2}SQ^2 + 2PO^2 + \frac{1}{2}SQ^2$$

$$= 2(R^2 - r^2) + 2R^2 + 2r^2 + 2R^2 + 2r^2 = 6R^2 + 2r^2.$$

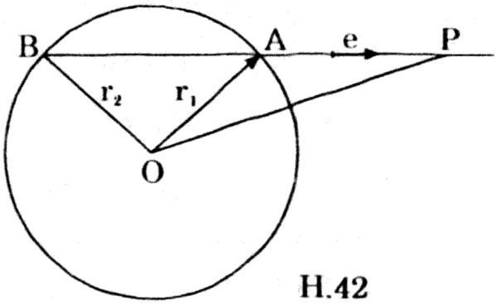
D. BẠN CÓ BIẾT ?

Vận dụng tích vô hướng các vectơ để chứng minh hệ thức lượng trong đường tròn

1. Trước hết xét định lí sau :

Nếu qua một điểm cho trước ta kẻ hai đường thẳng cắt một đường tròn cho trước thì tích các đoạn trên mỗi cát tuyến từ điểm đã cho tới giao điểm của nó với đường tròn là một đại lượng không đổi.

Giả sử điểm đã cho là P và hai đường thẳng kẻ từ P cắt đường tròn (O) tại A và B (hình 42). Gọi $\overrightarrow{PA} = k_1\vec{e}$, $\overrightarrow{PB} = k_2\vec{e}$ ($\vec{e}$ là vectơ đơn vị) ta có : $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = k_1k_2$. Ta chứng minh rằng tích k_1k_2 là một đại lượng không đổi.



H.42

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{r_1}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r_2}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{d}$ ta có :

$$\vec{r_1} = \vec{d} + k_1\vec{e}, \quad \vec{r_2} = \vec{d} + k_2\vec{e}.$$

Từ đó : $$\left.\begin{array}{l} \vec{r_1}^2 = R^2 = d^2 + 2k_1\vec{d}.\vec{e} + k_1^2 \\ \vec{r_2}^2 = R^2 = d^2 + 2k_2\vec{d}.\vec{e} + k_2^2 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Để ý rằng $2k_1\vec{d}.\vec{e} + k_1^2 = 2k_2\vec{d}.\vec{e} + k_2^2$

hay $2(k_1 - k_2)\vec{d}.\vec{e} = k_2^2 - k_1^2$ ($k_1 \neq k_2$) ta tìm được : $\vec{d}.\vec{e} = -\dfrac{k_1 + k_2}{2}$.

Vậy $R^2 = d^2 - k_1(k_1 + k_2) + k_1^2$ và $k_1k_2 = d^2 - R^2$ (2)

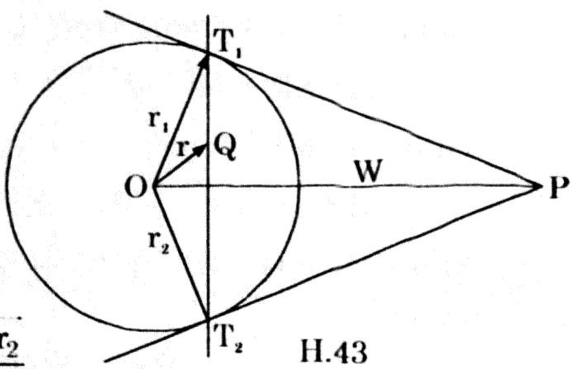
Đại lượng không đổi này gọi là *phương tích* của điểm đã cho đối với đường tròn đã cho tức là $\mathscr{P}_P(O) = d^2 - R^2$.

2. Giả sử từ điểm P ta kẻ hai tiếp tuyến PT_1 và PT_2 tới đường tròn (O; R) (hình 43) và đặt $\overrightarrow{OP} = \vec{w}$, $\overrightarrow{OT_1} = \vec{r_1}$, $\overrightarrow{OT_2} = \vec{r_2}$ thì rõ ràng :

$$(\vec{w} - \vec{r_1}).\vec{r_1} = 0, \quad (\vec{w} - \vec{r_2}).\vec{r_2} = 0$$

Vậy $\vec{w}.\vec{r_1} = R^2$ và $\vec{w}.\vec{r_2} = R^2$

Nhân đẳng thức thứ hai với k rồi cộng với đẳng thức thứ nhất được : $\vec{w}.(\vec{r_1} + k\vec{r_2}) = R^2(1 + k)$



H.43

Suy ra $\vec{w}.\vec{r} = R^2$, trong đó $\vec{r} = \dfrac{\vec{r_1} + k\vec{r_2}}{1 + k}$,

tức là $\vec{r}$ là bán kính – vectơ của bất cứ điểm nào trên đường thẳng T_1T_2.

Như vậy ta đã chứng minh rằng : *Nếu từ điểm P ở ngoài đường tròn (O; R) ta kẻ hai tiếp tuyến và Q là bất cứ điểm nào trên đường thẳng nối hai tiếp điểm thì tích* $OP.OQ.\cos\widehat{POQ}$ *là một đại lượng không đổi bằng bình phương bán kính đường tròn.*

§12. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \tan\alpha.\cot\alpha = 1.$$

2. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

a) Cung đối nhau : α và $(-\alpha)$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$$

b) Cung bù nhau : α và $(\pi - \alpha)$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$$

c) Cung hơn kém nhau π : α và $(\alpha + \pi)$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \qquad \tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha \qquad \cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha.$$

d) Cung phụ nhau : α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$$

3. Các công thức lượng giác

a) Công thức cộng :

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}.$$

b) Công thức nhân đôi :

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a\,; \qquad \cos 2a = \begin{cases}\cos^2 a - \sin^2 a\\ 2\cos^2 a - 1\\ 1 - 2\sin^2 a\end{cases}; \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

c) Công thức hạ bậc :

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}\,; \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}\,; \qquad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

d) Công thức tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo $t = \tan\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1 + t^2}\,; \qquad \cos\alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,; \qquad \tan\alpha = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

4. Công thức biến đổi

a) Biến đổi tích thành tổng :

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) + \cos(a + b)\right]$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a - b) + \sin(a + b)\right].$$

b) Biến đổi tổng thành tích :

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a + b}{2}\cos\frac{a - b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a + b}{2}\sin\frac{a - b}{2}$$

Ngoài ra còn có :

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a\cos b}\,;$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a - b)}{\cos a\cos b}.$$

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Không dùng bảng hãy tính :

a) $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$

b) $T = \sin^4\dfrac{\pi}{16} + \sin^4\dfrac{3\pi}{16} + \sin^4\dfrac{5\pi}{16} + \sin^4\dfrac{7\pi}{16}.$

2. Không dùng bảng :

a) Tính : $\tan^6\dfrac{\pi}{18} + \tan^6\dfrac{5\pi}{18} + \tan^6\dfrac{7\pi}{18}$

b) Chứng minh : $\cos 136^\circ < \tan 153^\circ$.

3. a) Tính : $\sin 15^\circ$ và $\cos 15^\circ$

b) Tính : $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

4. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\cos(a + b).\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

b) $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 4\cos^2\dfrac{a - b}{2}.$

5. Rút gọn :

a) $\dfrac{\sin 3\alpha}{1 - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2\alpha\right)}$ b) $\dfrac{(1 - \cos 2\beta) + \sin 2\beta}{(1 + \cos 2\beta) + \sin 2\beta}.$

6. Tính các biểu thức sau :

a) $\dfrac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$ b) $\sin^2\beta\tan\beta + \cos^2\beta\cot\beta + 2\sin\beta\cos\beta.$

7. Chứng minh đẳng thức :

a) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2\dfrac{\alpha}{2}$ b) $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right) = \dfrac{1 - \sin 2\beta}{1 + \sin 2\beta}.$

8. a) Chứng minh biểu thức sau bằng 0 :

$$A = \cos(a + b)\sin(a - b) + \cos(b + c)\sin(b - c) + \cos(c + d)\sin(c - d) + \cos(d + a)\sin(d - a)$$

b) Chứng minh biểu thức sau bằng $4\cos a\cos b\cos c$:

$$B = \cos(b + c - a) + \cos(c + a - b) + \cos(a + b - c) + \cos(a + b + c).$$

9. Chứng minh :

a) Nếu $\cos(\alpha + \beta) = 0$ thì $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha$

b) Nếu $3\sin\varphi = \sin(2\alpha + \varphi)$ thì $\tan(\alpha + \varphi) = 2\tan\alpha$.

10. Biến đổi thành một tích :

a) $1 + \cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}$　　　　b) $1 + \sin\beta + \cos\beta + \tan\beta$.

11. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $1 + \cos\varphi - \sin\varphi = 2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$

b) $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$, nếu $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

12. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau :

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta}.$$

13. Gọi a, b, c là ba cạnh liên tiếp của một tứ giác, α và β là các góc tương ứng giữa các cạnh a và b, b và c. Chứng minh rằng diện tích S của tứ giác bằng :

$$S = 0{,}5[ab\sin\alpha + bc\sin\beta - ac\sin(\alpha + \beta)].$$

14. Tính các góc của ΔABC biết :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{60} = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{35} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{48}.$$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Dựa vào công thức $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$ ta có thể biến đổi như sau :

$$\frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} = \frac{2\cos 80^\circ}{2\cos 80^\circ}.$$

Do đó : $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = 1$.

b) Áp dụng công thức $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ và $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ đối với các số hạng của tổng T ta có :

$$T = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}\right) +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}\right).$$

Các tổng trong dấu ngoặc đều bằng 0, vì :

$$\cos\frac{\pi}{8} = -\cos\frac{7\pi}{8};\ \cos\frac{3\pi}{8} = -\cos\frac{5\pi}{8};\ \cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{3\pi}{4};\ \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{7\pi}{4}.$$

Vậy ta có ngay $T = \frac{3}{2}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tính tổng T bằng cách khác :*

$$T = sin^4\frac{\pi}{16} + sin^4\frac{3\pi}{16} + sin^4\frac{5\pi}{16} + sin^4\frac{7\pi}{16}.$$

Giải : Tổng S có thể viết :

$$\mathrm{T} = \left(\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{3\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{5\pi}{16}\right)^2 + \left(\sin^2\frac{7\pi}{16}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(1 - \cos\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{5\pi}{16}\right)^2 + \left(1 - \cos\frac{7\pi}{16}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{5\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8}\right) + \left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - 2\left(2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(4 + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 - 2.0 + \frac{1}{2}\left(4 + 2\cos\pi\cos\frac{3\pi}{4} + 2\cos\pi\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4 + 2 + \cos\pi\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$$

Vậy tổng phải tìm là T = 1,5.

2. a) Ta có : $\tan^2 3.10^\circ = \tan^2 3.50^\circ = \tan^2 3.70^\circ = \frac{1}{3}$ **chứng tỏ** $x_1 = 10^\circ$, $x_2 = 50^\circ$, $x_3 = 70^\circ$ **là nghiệm của phương trình :**

$$\tan^2 3x = \frac{1}{3} \quad \text{hay} \quad \left(\frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\right)^2 = \frac{1}{3};$$

$$3\tan^6 x - 27\tan^4 x + 33\tan^2 x - 1 = 0$$

hay $3X^3 - 27X^2 + 33X - 1 = 0$ **(với** $X = \tan^2 x$**) có ba nghiệm là** $\tan^2 10^\circ$, $\tan^2 50^\circ$, $\tan^2 70^\circ$.

Theo định lí Viét thì : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 11 \\ x_1x_2x_3 = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Áp dụng công thức :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) + 3abc,$$

ta suy ra tổng phải tìm S = 433.

b) Ta có :

$\cos 136^{\circ} = -\cos(180^{\circ} - 136^{\circ}) = -\cos 44^{\circ} = -\sin(90^{\circ} - 44^{\circ}) = -\sin 46^{\circ}$ (1)

$\tan 153^{\circ} = -\tan(180^{\circ} - 153^{\circ}) = -\tan 27^{\circ}$ (2)

Từ (1) và (2) ta phải chứng minh rằng : $\tan 27^{\circ} < \sin 46^{\circ}$.

Do $\tan 27^{\circ} < \tan 30^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin 46^{\circ} > \sin 45^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, mà $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên

$$\tan 27^{\circ} < \tan 30^{\circ} < \sin 45^{\circ} < \sin 46^{\circ}.$$

Vậy $\cos 136^{\circ} < \tan 153^{\circ}$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng : $\tan 3x = \tan x.\tan(60^{\circ} - x).\tan(60^{\circ} + x)$ *(*)*

Từ đó, chứng minh : $\tan 20^{\circ}.\tan 40^{\circ}.\tan 80^{\circ} = \sqrt{3}$.

Giải : Ta có : $\tan x.\tan(60^{\circ} - x).\tan(60^{\circ} + x)$

$$= \tan x.\frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x}.\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3}\tan x} = \frac{\tan x(3 - \tan^2 x)}{1 - 3\tan^2 x} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng công thức về tang của tổng hai góc ta sẽ tìm được :

$$\tan 3x = \frac{\tan x(3 - \tan^2 x)}{1 - 3\tan^2 x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có ngay công thức (*).

* *Bị chú 1.* Ta cũng có thể tìm ngay được công thức (2) từ hai công thức :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \text{và} \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

Từ công thức (*) nếu trong hằng đẳng thức :

$\tan\alpha.\tan(60^{\circ} - \alpha).\tan(60^{\circ} + \alpha) = \tan 3\alpha$, ta cho $\alpha = 20^{\circ}$ thì sẽ có ngay $\tan 20^{\circ}.\tan 40^{\circ}.\tan 80^{\circ} = \sqrt{3}$.

* *Bị chú 2.* Không dùng công thức (*) ta cũng có thể tính kết quả

$\tan 20^{\circ}.\tan 40^{\circ}.\tan 80^{\circ} = \sqrt{3}$ như sau :

Áp dụng các công thức : $\sin x\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

và $\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$ ta được :

$$\sin 20^{\circ}.\sin 40^{\circ}.\sin 80^{\circ} = \frac{1}{2}(\cos 20^{\circ} - \cos 60^{\circ})\sin 80^{\circ}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 100^{\circ} + \sin 60^{\circ}}{2} - \frac{1}{2}\sin 80^{\circ}\right).$$

Thay $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$, ta tìm được : $\sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ (1)

Lại có : $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ = \dfrac{2\sin 20^\circ.\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ}$

$$= \frac{\sin 40^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ}{2\sin 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ.\cos 80^\circ}{4\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{8\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Như thế : $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ = \dfrac{1}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\tan 20^\circ.\tan 40^\circ.\tan 80^\circ = \sqrt{3}$.

3. a) Ta có : $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Tương tự ta tìm được $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

b) Ta có : $\sin 18^\circ = \sin\dfrac{\pi}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{5}$.

Nhưng $2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5} = \sin\dfrac{2\pi}{5}$; $2\sin\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \sin\dfrac{4\pi}{5} = \sin\dfrac{\pi}{5}$.

Nhân từng vế hai đẳng thức này được : $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4}$.

Mặt khác $\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5} = 2\sin\dfrac{3\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{10} = 2\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$.

Nếu đặt $\sin\dfrac{\pi}{10} = \cos\dfrac{2\pi}{5} = x$, $\cos\dfrac{\pi}{5} = y$, ta có $y - x = \dfrac{1}{2}$ và $xy = \dfrac{1}{4}$.

Nhưng $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$, do đó $x + y = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Kết hợp với $y - x = \dfrac{1}{2}$, ta có : $x = \sin\dfrac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$.

Tương tự ta tìm được $\cos 18^\circ = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Tính $\sin^2 2\alpha$*, biết rằng :* $\dfrac{1}{\tan^2\alpha} + \dfrac{1}{\cot^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 7$.

Giải : Ta có thể viết :

$$\cot^2\alpha + \tan^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 7\ ;$$

$$\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 1 = 7\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

hay $(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^4 + 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 7\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ ;$

$$2 = 9\sin^2\alpha\cos^2\alpha \text{ hay } 2 = \frac{9}{4}\sin^2 2\alpha$$

Vậy $\sin^2 2\alpha = \frac{8}{9}$.

4. Ta có :

a) $\cos(a + b)\cos(a - b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b)$

$= \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b = \cos^2 a(1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a)\sin^2 b$

$= \cos^2 a - \sin^2 b.$

b) $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = \cos^2 a + \cos^2 b + 2\cos a\cos b + \sin^2 a +$
$+ \sin^2 b + 2\sin a\sin b$

$= 1 + 1 + 2(\cos a\cos b + \sin a\sin b)$

$$= 2 + 2\left[\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b) + \cos(a - b) - \cos(a + b)}{2}\right]$$

$$= 2 + 2\cos(a - b) = 2[1 + \cos(a - b)] = 2.2\cos^2\frac{a - b}{2} = 4\cos^2\frac{a - b}{2}.$$

- ***Lời bình :*** *Biến đổi thành một tích biểu thức :*

$$A = \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + 2\cos a\cos b\cos c - 2.$$

Giải : Ta có : $\sin^2 a + \sin^2 b = \frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 - \cos 2b}{2} = \frac{2 - \cos 2a - \cos 2b}{2}$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)];\quad \sin^2 c = 1 - \cos^2 c.$$

Thay các giá trị này vào biểu thức A được :

$$A = -\frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) - \cos^2 c + [\cos(a + b) + \cos(a - b)]\cos c.$$

Biến đổi tổng cos2a + cos2b thành một tích ta có :

$$A = -\cos(a + b)\cos(a - b) - \cos^2 c + \cos(a + b)\cos c + \cos(a - b)\cos$$

hay $A = -[\cos(a - b) - \cos c][\cos(a + b) - \cos c]$

$$= 4\sin\frac{a - b + c}{2}.\sin\frac{c - a + b}{2}.\sin\frac{a + b + c}{2}.\sin\frac{a + b - c}{2}.$$

5. a) Ta có thể viết biểu thức đã cho như sau :

$$\frac{\sin(\alpha + 2\alpha)}{2\sin\left[\frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha\right)\right]} = \frac{\sin\alpha(\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha)}{4\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)} = \frac{2\cos 2\alpha + 1}{4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)}$$

$$= \frac{4\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)} = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right).$$

b) Ta có : $\dfrac{(1 - \cos 2\beta) + \sin 2\beta}{(1 + \cos 2\beta) + \sin 2\beta} = \dfrac{2\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta}$

$$= \frac{2\sin\beta(\sin\beta + \cos\beta)}{2\cos\beta(\sin\beta + \cos\beta)} = \tan\beta.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *rút gọn biểu thức :*

  $B = (1 - \sin\alpha)(1 - \sin\beta)(1 - \sin\gamma)$

  biết rằng : $(1 + \sin\alpha)(1 + \sin\beta)(1 + \sin\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

  Giải : Ta có :

$$B = \frac{(1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta)(1 - \sin^2\gamma)}{(1 + \sin\alpha)(1 + \sin\beta)(1 + \sin\gamma)} = \frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

$$= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

6. Ta có :

a) $\dfrac{(1 + \cos 2\alpha) + (\cos 3\alpha + \cos\alpha)}{(1 + \cos 2\alpha) + \cos\alpha - 1} = \dfrac{2\cos^2\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha + \cos\alpha}$

$$= \frac{2\cos\alpha(\cos\alpha + \cos 2\alpha)}{\cos\alpha + \cos 2\alpha} = 2\cos\alpha.$$

b) $\dfrac{\sin^2\beta\tan^2\beta + \cos^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\tan\beta}{\tan\beta} = \dfrac{\sin^2\beta\tan^2\beta + \cos^2\beta + 2\sin^2\beta}{\tan\beta}$

$$= \frac{\sin^2\beta\tan^2\beta + \sin^2\beta + 1}{\tan\beta} = \frac{\sin^2\beta(\tan^2\beta + 1) + 1}{\tan\beta}$$

$$= \frac{\sin^2\beta.\dfrac{1}{\cos^2\beta} + 1}{\tan\beta} = \frac{\tan^2\beta + 1}{\tan\beta} = \tan\beta + \cot\beta.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh biểu thức sau bằng 0 :*

  $3(\sin^6\varphi + \cos^6\varphi) - 3(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) + 1.$

Giải : Ta có thể viết :

$$2[(\sin^2\varphi)^3 + (\cos^2\varphi)^3] - 3(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) + 1$$

$$= 2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)(\sin^4\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi) - 3(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) + 1$$

$$= -(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi + 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi) + 1 = 1 - (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^2 = 0.$$

7. Ta có :

a) $$\frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

b) $$\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} = \frac{1 - \cos2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{1 + \cos2\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} = \frac{1 - \sin2\beta}{1 + \sin2\beta}.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh đẳng thức :*

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - \frac{2\cos(\varphi - \gamma)}{\sin\varphi\sin\gamma} = \frac{\sin^2(\varphi - \gamma)}{\sin^2\varphi\sin^2\gamma}.$$

Giải : Ta có thể viết vế trái như sau :

$$\frac{\sin^2\varphi + \sin^2\gamma - 2\cos(\varphi - \gamma)\sin\varphi\sin\gamma}{\sin^2\varphi\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos2\varphi + 1 - \cos2\gamma) - 2\cos(\varphi - \gamma)\sin\varphi\sin\gamma}{\sin^2\varphi\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos(\varphi + \gamma)\cos(\varphi - \gamma) - 2\cos(\varphi - \gamma)\sin\varphi\sin\gamma}{\sin^2\varphi\sin^2\gamma}$$

$$= \frac{1 - \cos^2(\varphi - \gamma)}{\sin^2\varphi\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2(\varphi - \gamma)}{\sin^2\varphi\sin^2\gamma}.$$

8. a) Áp dụng công thức $\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$ ta có :

$$2\cos(a + b)\sin(a - b) = \sin2a - \sin2b$$

$$2\cos(b + c)\sin(b - c) = \sin2b - \sin2c, \quad \text{v.v...}$$

ta sẽ được biểu thức đã cho bằng 0.

b) Tổng hai cos đầu tiên bằng :

$$\cos(b + c - a) + \cos(c + a - b) = 2\cos c\cos(b - a)$$

Tổng hai cos tiếp theo bằng :

$$\cos(a + b - c) + \cos(a + b + c) = 2\cos(a + b)\cos c$$

Từ đó ta tính được kết quả bằng $4\cos a\cos b\cos c$.

- **Lời bình :** Tương tự, *chứng minh biểu thức sau bằng* $3 - \tan^2\varphi$:

$$P = \frac{1-\cos^2\varphi}{\dfrac{1}{\cos^2\varphi}-1} + \frac{1-\sin^2\varphi}{\dfrac{1}{\sin^2\varphi}-1} - (\tan\varphi - \cot\varphi)^2 + \frac{1-\sin^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}.$$

Giải : Ta có thể viết P như sau :

$$P = \frac{\sin^2\varphi}{\tan^2\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\cot^2\varphi} - \tan^2\varphi + 2 - \cot^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \tan^2\varphi + 2 = 3 - \tan^2\varphi.$$

9. a) Nhân hai vế của $\cos(\alpha + \beta) = 0$ với $2\sin\beta$, rồi áp dụng công thức

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)],$$ được :

$$2\sin\beta\cos(\alpha + \beta) = \sin(\beta - \alpha - \beta) + \sin(2\beta + \alpha) = 0$$

Từ đó : $\sin(-\alpha) + \sin(\alpha + 2\beta) = 0$ hay $\sin(\alpha + 2\beta) = \sin\alpha$.

b) Điều kiện $\cos\alpha\cos(\alpha + \varphi) \neq 0$.

Ta có : $\varphi = (\alpha + \varphi) - \alpha$, $2\alpha + \varphi = (\alpha + \varphi) + \alpha$.

Thay vào $\tan(\alpha + \varphi) = 2\tan\alpha$, được $3\sin\varphi = \sin(2\alpha + \varphi)$ (*)

Áp dụng các công thức về sin của tổng và hiệu các góc ta biến đổi (*) thành dạng : $\sin(\alpha + \varphi)\cos\alpha = 2\cos(\alpha + \varphi)\sin\alpha$.

Chia hai vế của đẳng thức cuối này cho $\cos\alpha\cos(\alpha + \varphi) \neq 0$ ta sẽ được : $\tan(\alpha + \varphi) = 2\tan\alpha$.

- **Lời bình :** Giải thêm bài toán sau :

Gọi α, β, γ *là ba góc của một tam giác, chứng minh hệ thức :*

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2} = 1.$$

Giải :

– *CÁCH 1.* Theo bài ra ta có : $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ và $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Từ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, suy ra : $\tan\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$ (1)

Mặt khác ta có : $\tan\left(\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right) = \dfrac{\tan\dfrac{\beta}{2} + \tan\dfrac{\gamma}{2}}{1 - \tan\dfrac{\beta}{2}\tan\dfrac{\gamma}{2}}$ (2)

Từ (1) và (2), sau khi khử mẫu ta sẽ được hệ thức cần chứng minh.

- *CÁCH 2.*

a) Trước hết ta chứng minh công thức :

$$\cos(x + y + z) = \cos x\cos y\cos z(1 - \tan x\tan y - \tan y\tan z - \tan z\tan x) \quad (*)$$

Thật vậy, dựa vào hằng đẳng thức :

$$\cos(x + y + z) = \cos(x + y)\cos z - \sin(x + y)\sin z$$
$$= \cos x\cos y\cos z - \cos z\sin x\sin y - \cos y\sin x\sin z - \cos x\sin y\sin z$$

(với điều kiện $\cos x\cos y\cos z \neq 0$) ta suy ra được công thức trên.

b) Từ công thức (*) ta có :

$$\cos\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}\right) =$$
$$= \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(1 - \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2} - \tan\frac{\gamma}{2}\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

ta tìm được ngay rằng biểu thức trong dấu ngoặc ở vế phải bằng 0 vì $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$.

10. a) Vì $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ nên biểu thức đã cho có dạng :

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{hay} \quad 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Thay $\frac{1}{2}$ bằng $\cos 60^\circ$ được $2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos 60^\circ\right)$. Từ đó ta có kết quả là : $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4} + 30^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{4} - 30^\circ\right)$.

b) Ta nhóm các số hạng như sau :

$$(1 + \cos\beta) + (\tan\beta + \sin\beta) = (1 + \cos\beta).(1 + \tan\beta)$$

Ta có : $1 + \tan\beta = \tan 45^\circ + \tan\beta = \frac{\sin(45^\circ + \beta)}{\cos 45^\circ \cos\beta}$.

Từ đó ta có kết quả là : $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\sin(45^\circ + \beta)}{\cos\beta}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *biến đổi thành một tích :*

c) $S = \cot^2 2\varphi - \tan^2 2\varphi - 8\cos 4\varphi\cot 4\varphi$

d) $T = \cos\gamma + \sin 2\gamma - \cos 3\gamma$.

Giải : Ta có :

c) $\cot^2 2\varphi - \tan^2 2\varphi = \dfrac{\cos^2 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} - \dfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} = \dfrac{\cos^4 2\varphi - \sin^4 2\varphi}{\sin^2 2\varphi\cos^2 2\varphi}$

$$= \frac{\cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi}{\dfrac{1}{4}\sin^2 4\varphi} = \frac{4\cos 4\varphi}{\sin^2 4\varphi}.$$

Vậy $S = \dfrac{4\cos 4\varphi}{\sin^2 4\varphi}(1 - 2\sin 4\varphi\cos 4\varphi) = \dfrac{4\cos 4\varphi}{\sin^2 4\varphi}(1 - \sin 8\varphi).$

Vì $1 - \sin 8\varphi = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 4\varphi\right)$ nên cuối cùng ta được :

$$S = \frac{8\cos 4\varphi.\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 4\varphi\right)}{\sin^2 4\varphi}.$$

d) Vì $\cos\gamma - \cos 3\gamma = 2\sin 2\gamma\sin\gamma$ nên :

$$T = 2\sin\gamma\cos\gamma + \sin 2\gamma = 2\sin 2\gamma\left(\sin\gamma + \frac{1}{2}\right) = 2\sin 2\gamma(\sin\gamma + \sin 30^\circ)$$

$$= 4\sin 2\gamma.\sin\left(\frac{\gamma}{2} + 15^\circ\right).\cos\left(\frac{\gamma}{2} - 15^\circ\right).$$

11. Ta có :

a) $1 + \cos\varphi - \sin\varphi = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2} - 2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} - \sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$

$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(90^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)\right] = 4\cos\frac{\varphi}{2}\sin 45^\circ\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right).$$

b) $\tan(\alpha + \beta) = -\tan\gamma$ hay $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\tan\gamma$

Từ đó có ngay : $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh đẳng thức sau :*

$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z + 2\cos x\cos y\cos z - 2 =$

$$= 4\sin\frac{x - y + z}{2}.\sin\frac{z - x + y}{2}.\sin\frac{x + y + z}{2}.\sin\frac{x + y - z}{2}.$$

Giải : Gọi vế trái là M, ta biến đổi $\sin^2 x + \sin^2 y = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1 - \cos 2y}{2}$, rồi thay tích $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ và cuối cùng thay $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z$ sẽ được :

$$M = -\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) - \cos^2 z + [\cos(x+y) + \cos(x-y)]\cos z$$

Thay cos2x + cos2y thành tích và bỏ dấu [ ] được :

$$\begin{aligned} M &= -\cos(x+y)\cos(x-y) - \cos^2 z + \cos(x+y)\cos z + \cos(x-y)\cos z \\ &= -[\cos(x-y) - \cos z][\cos(x+y) - \cos z] \\ &= 4\sin\frac{x-y+z}{2}.\sin\frac{z-x+y}{2}.\sin\frac{x+y+z}{2}.\sin\frac{x+y-z}{2} \end{aligned}$$

Vậy vế trái M đúng bằng vế phải của đẳng thức cần chứng minh.

12. Do $(\sin\alpha - 1)(\sin\beta + 1) \le 0$ nên $\sin\alpha - \sin\beta \le 1 - \sin\alpha\sin\beta$.

Lại do $\sin\alpha\sin\beta \le 1$ và $1 - \sin\alpha\sin\beta \ne 0$ (nếu không thì biểu thức đã cho không có nghĩa) nên : $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta} \le 1$.

Do bất đẳng thức $(\sin\alpha + 1)(1 - \sin\beta) \ge 0$ ta suy ra biểu thức đã cho lớn hơn hoặc bằng −1. Cả hai giá trị này đạt được chẳng hạn với $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$ và với $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức :*

$$N = \frac{(\sin\alpha + \sin\beta)\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma}{1 + \sin\alpha\sin\beta}.$$

Giải : Do $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + \cos^2\alpha.\cos^2\beta =$

$$\begin{aligned} &= \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\beta) \\ &= 1 + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta = (1 + \sin\alpha\sin\beta)^2 \end{aligned}$$

nên biểu thức N có thể viết dưới dạng :

$\sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\gamma = \sin(\varphi + \gamma)$ và do đó $-1 \le N \le 1$.

Ngoài ra $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, suy ra N = 1

và $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \pi$, suy ra N = −1.

Vậy giá trị lớn nhất của N bằng 1 và giá trị nhỏ nhất bằng −1.

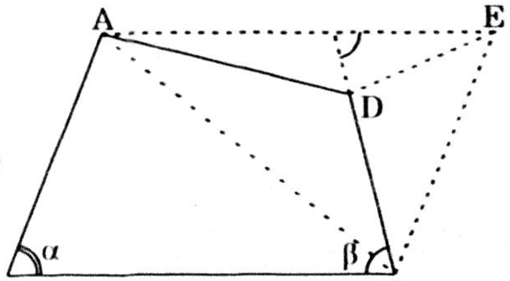
13. Giả sử ABCD là tứ giác đã cho (hình 44). Lấy điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Gọi góc giữa CD và AE là β, $\widehat{DCE} = 180^\circ - \alpha - \beta$.

Ta có :

$S = S_{ABC} + S_{ACED} - S_{DCE}$

$= 0{,}5ab\sin\alpha + 0{,}5bc\sin\beta - 0{,}5ac\sin(\alpha + \beta)$

$= 0{,}5[ab\sin\alpha + bc\sin\beta - ac\sin(\alpha + \beta)]$.



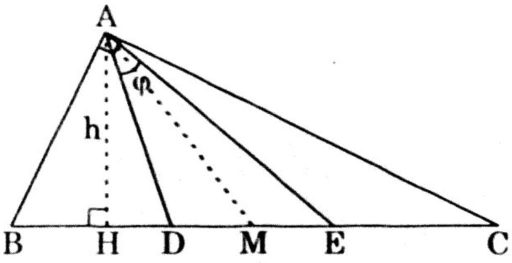
H.44

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Cho tam giác ABC vuông tại A.

Chia cạnh huyền thành n (n lẻ) đoạn bằng nhau. Gọi φ là góc A của tam giác ADE trong đó DE là đoạn chia chứa trung điểm M của BC và h là đường cao tam giác. Chứng minh :

$$\tan\varphi = \frac{4nh}{a(n^2 - 1)} \quad \text{với } a = BC.$$



H.45

Giải : Ta có (hình 45) :

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2},\ DE = \frac{a}{n}$$

và $2S = AD.AE\sin\varphi = \frac{ah}{n}$. Suy ra : $\sin\varphi = \frac{ah}{n.AD.AE}$.

Xét ΔADE ta có hệ thức lượng :

$$AD^2 + AE^2 = 2AM^2 + \frac{DE^2}{2} \quad \text{hay} \quad 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}.\frac{a^2(n^2+1)}{n^2}.$$

Do đối với ΔBC ta có hệ thức lượng $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$,

hay $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ nên áp dụng vào ΔADE sẽ tìm được :

$$\cos\varphi = \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2AD.AE} = \frac{\frac{a^2}{2}.\frac{n^2+1}{n^2} - \frac{a^2}{n^2}}{2AD.AE} = \frac{\frac{a^2(n^2-1)}{2n^2}}{2AD.AE}$$

Như vậy : $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{4nh}{a(n^2 - 1)}$.

14. Trước hết ta biến đổi tử của các biểu thức đã cho thành nhân tử :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C.$$

Từ đó kết hợp với giả thiết ta có :

$$\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{60:4}{35}=\frac{3}{7} \qquad (1)$$

$$\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin A\sin B\sin C}=\frac{60}{48}=\frac{5}{4} \qquad (2)$$

Suy ra : $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=0{,}1$. Thay vào (1) được :

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=0{,}6 \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có : $\sin A\sin B\sin C=0{,}48$.

Do $\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$, nên nhân với $\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ được : $\sin^2\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=0{,}6\sin\frac{C}{2}-0{,}1\cos\frac{C}{2}$. Đặt $\cos\frac{C}{2}=x$, ta có :

$(1-x^2)x=0{,}6\sqrt{1-x^2}-0{,}1x$ hay $11x-10x^3=6\sqrt{1-x^2}$, tức là :

$100x^6-220x^4+157x^2-36=0$ hay nếu đặt $x^2=y$ thì được :

$100y^3-220y^2+157y-36=0.$

Nhân với 10 rồi đặt $10y=z$ sẽ có phương trình :

$z^3-22z^2+157z-360=0$ hay $(z-5)(z^2-17z+72)=0$.

Giải ra được $z_1=5$, $z_2=8$, $z_3=9$.

Do $\cos\frac{C}{2}=x$, $\sqrt{y}=\sqrt{\frac{z}{10}}$ nên ta suy ra :

a) $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ hay $\sin C=1$.

b) $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{4}{5}}$ hay $\sin C=0{,}8$.

c) $\cos\frac{C}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}$ hay $\sin C=0{,}6$.

Do (3) ta suy ra $\sin A+\sin B+\sin C=2{,}4$. Đặt $\sin C=\sin(A+B)$ ta có :

$$\begin{cases}\sin A+\sin B=1{,}4\\ \sin A\sin B=0{,}48\end{cases};\quad \begin{cases}\sin A+\sin B=1{,}6\\ \sin A\sin B=0{,}6\end{cases};\quad \begin{cases}\sin A+\sin B=1{,}8\\ \sin A\sin B=0{,}8.\end{cases}$$

Giải các hệ nói trên được :

$$\begin{cases}\sin A = 0{,}6\\ \sin B = 0{,}8\\ \sin C = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin A = 0{,}8\\ \sin B = 0{,}6\\ \sin C = 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin A = 1\\ \sin B = 0{,}6\\ \sin C = 0{,}8\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin A = 0{,}6\\ \sin B = 1\\ \sin C = 0{,}8\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin A = 1\\ \sin B = 0{,}8\\ \sin C = 0{,}6\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin A = 0{,}8\\ \sin B = 1\\ \sin C = 0{,}6.\end{cases}$$

Vậy ứng với 6 hệ thức khác nhau ở trên, ta có các góc của ΔABC là : 90^o; $\arcsin\frac{3}{5}$; $\arcsin\frac{4}{5}$. Tam giác này được gọi là tam giác Ai-Cập.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Gọi d, e, f là độ dài ba cạnh của ΔDEF. Chứng minh rằng d, e, f là nghiệm của phương trình : $z^3 - 2pz^2 + (r^2 + p^2 + 4Rr)z - 4Rrp = 0$, trong đó p là nửa chu vi, R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Giải : Theo định lí Viét đối với phương trình bậc ba ta có :

$$\begin{cases}d + e + f = 2p\\ de + ef + fd = r^2 + p^2 + 4Rr & (1)\\ def = 4Rrp & (2)\end{cases}$$

Do d + e + f = 2p luôn đúng nên ta chỉ cần chứng minh (1) và (2) đúng.

Ta biết rằng $S = \frac{def}{4R} = pr$, nên $4Rrp = def$, do đó (2) luôn đúng.

Hệ thức (1) có thể viết :

$$p(de + ef + fd) = (p - d)(p - e)(p - f) + p^3 + def \qquad (3)$$

Đẳng thức (3) này luôn đúng vì :

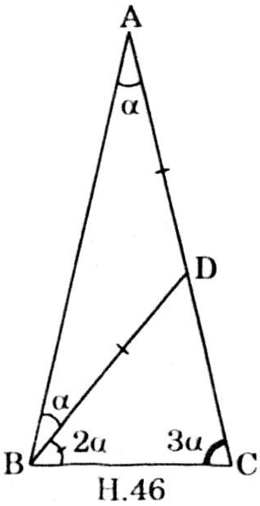
$$\begin{aligned}(p - d)(p - e)(p - f) &= p^3 - (d + e + f)p^2 + (de + ef + fd)p - def\\ &= -p^3 + (de + ef + fd)p - def.\end{aligned}$$

D. BẠN CÓ BIẾT ?

Ba bài toán hay

Bài 1. *Góc ở đỉnh của một tam giác cân bằng $\frac{\pi}{7}$. Chứng minh rằng giữa cạnh đáy a và cạnh bên b có hệ thức sau :*

$$a^5 - 4a^3b^2 + 3ab^4 - b^5 = 0.$$



H.46

Giải : Nếu $\widehat{A} = \alpha = \frac{\pi}{7}$ thì $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{3\pi}{7}$ (hình 46).

Kẻ BD sao cho $\widehat{ABD} = \alpha$, ta có :

$$\widehat{DBC} = \widehat{BDC} = 2\alpha.$$

Từ hai tam giác ABD và BDC ta có :

$$\cos\alpha = \frac{b}{2(b-a)}, \quad \cos2\alpha = \frac{b-a}{2a}.$$

Vì $1 + \cos2\alpha = 2\cos^2\alpha$, nên

$$\frac{b+a}{2a} = \frac{b^2}{2(b-a)^2} \quad \text{hay} \quad a^3 - a^2b - 2ab^2 + b^3 = 0 \qquad (*)$$

Đa thức đã cho $P = a^5 - 4a^3b^2 + 3ab^4 - b^5$ có thể phân tích thành nhân tử :

$$P = (a^3 - a^2b - 2ab^2 + b^3)(a^2 + ab - b^2).$$

Như thế từ (*) ta suy ra $P = 0$.

Bài 2. *Trong nửa đường tròn (O; R) ta nội tiếp tứ giác có cạnh chung bằng bán kính nửa đường tròn. Tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.*

Giải : Giả sử $\widehat{A} = x$, $\widehat{D} = y$ (hình 47), thế thì

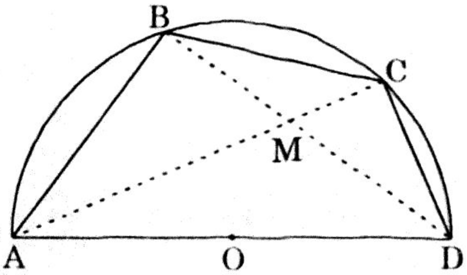
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD.AC.\sin\widehat{AMD}$$

$$= 2R^2\sin x\sin y\sin(x+y).$$

Đặt $x + y = 180^\circ - z$, ta có :

$$S_{ABCD} = 2R^2.\sin x\sin y\sin z$$

$$\le 2R^2.\frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$



H.47

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 60^\circ$.

Vậy tứ giác phải tìm là hình thang cân có góc 60°.

Bài 3. *Chứng minh rằng nếu $A_1A_2...A_{15}$ là đa giác 15 cạnh đều thì ta có hệ thức :*

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_8}.$$

Giải : Nếu bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác 15 cạnh đều bằng $\frac{1}{2}$ thì ta có : $A_1A_2 = \sin12^\circ$, $A_1A_3 = \sin24^\circ$,

$$A_1A_5 = \sin48^\circ, \quad A_1A_8 = \sin96^\circ.$$

Hệ thức phải chứng minh trở thành chứng minh đẳng thức sau :

$$\frac{1}{\sin 12^\circ} - \frac{1}{\sin 24^\circ} - \frac{1}{\sin 48^\circ} - \frac{1}{\sin 96^\circ} = 0$$

Thật thế, vế trái có thể viết :

$$\frac{\sin 48^\circ - \sin 12^\circ}{\sin 12^\circ \sin 48^\circ} - \frac{\sin 96^\circ + \sin 24^\circ}{\sin 24^\circ \sin 96^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 30^\circ \sin 18^\circ}{\sin 12^\circ \sin 48^\circ} . \frac{4\cos 12^\circ \cos 48^\circ}{4\cos 12^\circ \cos 48^\circ} - \frac{2\cos 30^\circ \cos 36^\circ}{\sin 24^\circ \cos 96^\circ}$$

$$= \frac{2\cos 30^\circ (4\sin 18^\circ \cos 12^\circ \cos 48^\circ - \cos 36^\circ)}{\sin 24^\circ \sin 96^\circ} .$$

Nhưng $4\sin 18^\circ \cos 12^\circ \cos 48^\circ = 2\sin 18^\circ(\cos 60^\circ + \cos 36^\circ)$

$$= \sin 18^\circ + \sin 54^\circ - \sin 18^\circ$$

$$= \cos 36^\circ.$$

Vậy tử của phân số cuối cùng này bằng 0, do đó ta suy ra hệ thức cần chứng minh.

§13. ĐỊNH LÍ CÁC HÀM SỐ SIN, COSIN, TANG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Định lí hàm số sin

Trong mọi ΔABC ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

2. Định lí hàm số côsin

Trong mọi ΔABC ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ab\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$

3. Định lí hàm số tang

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}};\quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}};\quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

Công thức tính diện tích tam giác :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Cho tam giác nhọn DEF với I, J, K theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ D, E, F.

a) Tính chu vi ΔIJK.

b) Tính diện tích ΔDEF.

2. Ba góc của ΔMNP tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Chứng minh các hệ thức :

a) $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}$

b) $\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P = \dfrac{5}{4}.$

3. Cho ΔDEF, các góc E và F có tỉ lệ 3 : 1. Phân giác góc F chia diện tích tam giác theo tỉ lệ 2 : 1. Tính các góc của tam giác.

4. Cho ΔDEF $(\hat{E} > \hat{F})$. DM và DN theo thứ tự là phân giác và trung tuyến của góc D. Chứng minh rằng : $\tan\widehat{NDM} = \tan^2\dfrac{D}{2}.\tan\dfrac{E-F}{2}.$

5. Chứng minh rằng với m tùy ý tồn tại một tam giác có ba cạnh là $\sqrt{m^2 - m + 1}$, $\sqrt{m^2 + m + 1}$, $\sqrt{4m^2 + 3}$ và diện tích của tam giác này không phụ thuộc vào m.

6. Chứng minh định lí Ptôlêmê : "Tích các đường chéo của tứ giác nội tiếp bằng tổng của hai tích các cạnh đối" bằng ba cách (hình học, định lí hàm số sin, định lí hàm số côsin).

7. Cho ΔABC có BL và BM theo thứ tự là phân giác và trung tuyến.

Chứng minh hệ thức : $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{2S_{\Delta BML}} = \dfrac{\tan\dfrac{A+C}{2}}{\tan\dfrac{A-C}{2}}$.

8. Cho ΔDEF có ba đường cao thỏa mãn đẳng thức $2h_d = h_e + h_f$. Chứng minh rằng : $\dfrac{2}{\sin D} = \dfrac{1}{\sin E} + \dfrac{1}{\sin F}$.

9. Chứng minh rằng trong ΔMNQ nếu các bán kính đường tròn nội tiếp r và đường tròn bàng tiếp trong các góc M, N, Q thỏa mãn đẳng thức $r_m = r_n + r_q + r$ thì ΔMNQ vuông tại M.

10. Trong tất cả tam giác MNP cùng đáy và cùng góc ở đỉnh M tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

11. Chứng minh rằng bình phương của phân giác kẻ qua một đỉnh của một tam giác bất kì bằng tích hai cạnh bên trừ đi tích các đoạn mà phân giác đó chia cạnh đáy.

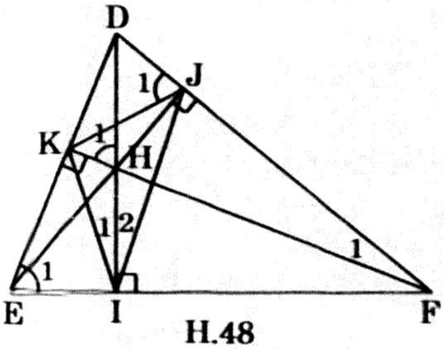
Giải thích đẳng thức tìm được trong trường hợp tam giác này cân.

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. a) Gọi H là trực tâm ΔDEF (hình 48). Xét tứ giác DJHK nội tiếp, ta có

$\hat{J}_1 = \hat{H}_1$ (cùng chắn cung DK).

Lại có $\hat{H}_1 = \hat{E}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc), nên $\hat{J}_1 = \hat{E}$.



H.48

Do đó $\Delta DJK \backsim \Delta DEF$, suy ra :

$$\frac{JK}{EF} = \frac{DJ}{DE} = \cos D \quad \text{hay} \quad JK = d\cos D = 2R\sin D\cos D = R\sin 2D$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔDEF).

Tương tự ta có : $KI = R\sin 2E$, $IJ = R\sin 2F$.

Vậy chu vi ΔIJK bằng $R(\sin 2D + \sin 2E + \sin 2F)$

hay $4R\sin D\sin E\sin F$.

b) Ta có : $\hat{I}_1 = \hat{E}_1 = \dfrac{\pi}{2} - \hat{D}$ và $\hat{I}_2 = \hat{F}_1 = \dfrac{\pi}{2} - \hat{D}$.

Suy ra : $\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \pi - 2\hat{D}$.

Từ đó diện tích ΔIJK bằng $\frac{1}{2}IJ.IK.\sin I$

hay $\frac{1}{2}.f\cos F.e\cos E.\sin 2D = \left(\frac{1}{2}ef\sin D\right).\cos D\cos E\cos F.2$

$$= 2S\cos D\cos E\cos F,$$

trong đó S là diện tích ΔDEF.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Chứng minh các hệ thức sau trong ΔMNP :

a) $(m-n)\cot\frac{P}{2} + (n-p)\cot\frac{M}{2} + (p-m)\cot\frac{N}{2} = 0$

b) Phân giác trong của góc M bằng $\frac{2np}{n+p}\cos\frac{M}{2}$.

Giải :

a) Theo định lí hàm số sin ta có :

$$(m-n)\cot\frac{P}{2} = 2R(\sin M - \sin N)\cot\frac{P}{2} = 4R\cos\frac{M+N}{2}\sin\frac{M-N}{2}$$

Thay $\cos\frac{M+N}{2} = \sin\frac{P}{2}$ và $\cos\frac{P}{2} = \sin\frac{M+N}{2}$ được :

$$(m-n)\cot\frac{P}{2} = 4R\sin\frac{M-N}{2}\sin\frac{M+N}{2} = 2R(\cos N - \cos M)$$

Tương tự : $(m-n)\cot\frac{M}{2} = 2R(\cos P - \cos N)$

$$(m-n)\cot\frac{N}{2} = 2R(\cos M - \cos P)$$

Cộng từng vế ba đẳng thức cuối này ta sẽ được kết quả.

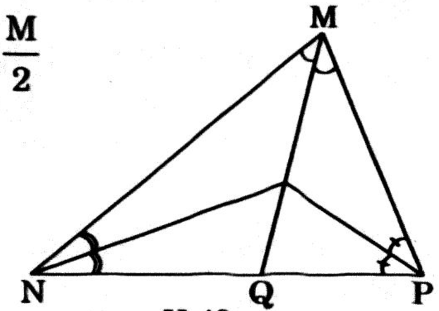
b) Gọi MQ là phân giác trong của góc M, ta có (hình 49) :

$$S_{MNP} = S_{MNQ} + S_{MPQ}$$

hay $\frac{1}{2}np\sin M = \frac{1}{2}pMQ\sin\frac{M}{2} + \frac{1}{2}nMQ\sin\frac{M}{2}$

$$2np\sin\frac{M}{2}\cos\frac{M}{2} = MQ(n+p)\sin\frac{M}{2}.$$

Vậy $MQ = \dfrac{2np\cos\frac{M}{2}}{n+p}$.



H.49

2. a) Theo bài ra ta có : $\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = \pi$ và $4M = 2N = P$, suy ra $M = \dfrac{\pi}{7}$, $N = \dfrac{2\pi}{7}$, $P = \dfrac{4\pi}{7}$.

Theo định lí hàm số sin thì :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin\frac{4\pi}{7}}\right) = \frac{1}{2R}.\frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{2R}.\frac{2\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right)} = \frac{1}{2R\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{m}.$$

Vậy ta có ngay hệ thức $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}$.

b) Hệ thức phải chứng minh tương đương với :

$$\cos^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{2\pi}{7} + \cos^2\frac{4\pi}{7} = \frac{5}{4}$$

hay $\dfrac{1 + \cos\frac{2\pi}{7}}{2} + \dfrac{1 + \cos\frac{4\pi}{7}}{2} + \dfrac{1 + \cos\frac{8\pi}{7}}{2} = \dfrac{5}{4}$, tức là:

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Gọi Q là biểu thức ở vế trái, ta có thể viết :

$$2Q\sin\frac{\pi}{7} = 2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}$$

$$= \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}$$

$$= -\sin\frac{\pi}{7}, \quad \text{vì } \sin\frac{5\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}.$$

Vậy ta có : $Q = -\dfrac{1}{2}$.

- ***Lời bình :*** *Nếu ba cạnh m, n, p lập thành một cấp số cộng* ***(m < n < p)*** ***hãy chứng minh*** *hệ thức mp = 6Rr, rồi tính công sai d của* ***cấp số cộng*** *đó.*

Giải : Ta biết rằng : $S = \dfrac{mnp}{4R} = pr$, với chu vi $= m + n + p = 3n$ (do m, n, p lập thành cấp số cộng).

Từ đó ta có : $mnp = 6Rrn$ hay $mp = 6Rr$.

Để tính công sai d, ta có hệ thức :

$$r = (\text{nửa chu vi} - p)\tan\frac{P}{2} = \frac{1}{2}(m + n - p)\tan\frac{P}{2}$$

hay $\frac{1}{2}(m + n - p) = r\cot\frac{P}{2}$ (1), tương tự : $\frac{1}{2}(n + p - m) = r\cot\frac{M}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $p - m = r\left(\cot\frac{M}{2} - \cot\frac{P}{2}\right)$

hay công sai $d = \frac{r}{2}\left(\cot\frac{M}{2} - \cot\frac{P}{2}\right)$.

3. Gọi phân giác của góc D là DM ta có :

$$S_{DMF} = \frac{1}{2}DM.DF.\sin\frac{\widehat{D}}{2}; \qquad S_{DME} = \frac{1}{2}DM.DE.\sin\frac{\widehat{D}}{2}.$$

Theo bài ra : $\frac{S_{DMF}}{S_{DME}} = 2 = \frac{DF}{DE}$. Từ đó áp dụng định lí hàm số sin ta có :

$$\frac{DE}{\sin F} = \frac{DF}{\sin E} \quad \text{hay} \quad \frac{\sin E}{\sin F} = \frac{DF}{DE} = 2.$$

Do $\widehat{E} = 3\widehat{F}$ nên $\sin 3F = 2\sin F$, hay $\sin 3F.\cos F = \sin 2F$.

Biến đổi vế trái thành tổng được :

$$\sin 4F + \sin 2F = 2\sin 2F \quad \text{hay} \quad \sin 4F = \sin 2F \qquad (*)$$

Vì $\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ$ hay $\widehat{D} = 180^\circ - 4\widehat{F}$, mà $\widehat{D} > 0$ nên $\widehat{F} < 45^\circ$.

Phương trình (*) có nghiệm thích hợp khi $4\widehat{F} = 180^\circ - 2\widehat{F}$ hay $\widehat{F} = 30^\circ$.
Từ đó $\widehat{E} = 90^\circ$ và $\widehat{D} = 60^\circ$.

Vậy ba góc của ΔDEF là $\widehat{D} = 60^\circ$, $\widehat{E} = 90^\circ$, $\widehat{F} = 30^\circ$.

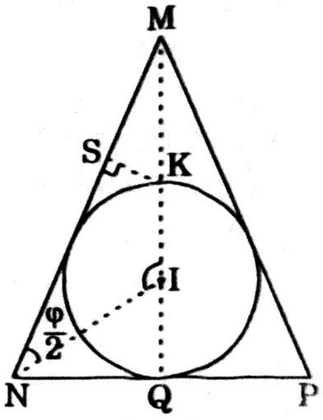
- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Cho ΔMNP cân có các góc ở đáy $\widehat{N} = \widehat{P} = \varphi$. Đường cao kẻ từ điểm M bằng bán kính đường tròn nội tiếp cộng với một đoạn thẳng a. Tính cạnh đáy và bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔMNP cân.

Giải : Xét ΔMIN (hình 50) ta có :

$$\widehat{MNI} = \frac{\varphi}{2}, \ \widehat{NMI} = 90^\circ - \varphi.$$

Từ đó $\widehat{MIN} = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$ và $MI = a$.



H.50

Theo định lí hàm số sin thì :

$$\frac{MN}{\sin\widehat{MIN}} = \frac{a}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad \text{hay} \quad MN = \frac{a\sin\left(90^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}} \quad \text{và} \quad MN = a\cot\frac{\varphi}{2}.$$

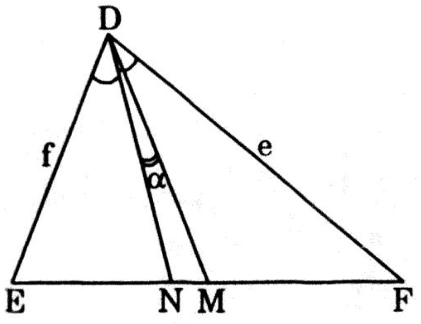
Xét ΔMQN vuông tại Q ta có : $NQ = MN\cos\varphi = a\cot\frac{\varphi}{2}.\cos\varphi$

$$NP = 2NQ = 2a\cot\frac{\varphi}{2}\cos\varphi.$$

Xét ΔMSK vuông tại S (S là trung điểm của MN) ta có :

$$R = KM = \frac{MS}{\cos(90^\circ - \varphi)} = \frac{MN}{2\sin\varphi} = \frac{a\cot\frac{\varphi}{2}}{2\sin\varphi}$$

Vậy $R = \dfrac{a}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}$.



H.51

4. Đặt $\widehat{NDM} = \alpha$ (hình 51).

Ta có : $S_{DEM} = S_{DMF} = \frac{1}{2}S_{DEF}$,

tức là :

$$\frac{1}{2}f.DM\sin\left(\frac{D}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}e.DM\sin\left(\frac{D}{2} - \alpha\right)$$

hay $f\left(\sin\frac{D}{2}\cos\alpha + \cos\frac{D}{2}\sin\alpha\right) = e\left(\sin\frac{D}{2}\cos\alpha - \cos\frac{D}{2}\sin\alpha\right)$

$$(e - f)\sin\frac{D}{2}\cos\alpha = (e + f)\cos\frac{E}{2}\sin\alpha.$$ Từ đó :

$$\tan\alpha = \tan\frac{D}{2}.\frac{e - f}{e + f} = \tan\frac{D}{2}.\frac{\tan\frac{E - F}{2}}{\tan\frac{E + F}{2}}$$ (theo định lí hàm số tang)

$$\text{hay } \tan\frac{D}{2}.\frac{\tan\frac{E - F}{2}}{\cot\frac{D}{2}} = \tan^2\frac{D}{2}.\tan\frac{E - F}{2}$$

(vì hai góc $\frac{E + F}{2}$ và $\frac{D}{2}$ phụ nhau).

- ***Lời bình :***

a) Hãy giải bài toán này bằng cách áp dụng định lí hàm số sin.

Giải : Ta có : $\dfrac{EM}{ME} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{D}{2} + \alpha\right)}{\sin E}$; $\dfrac{FM}{ME} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{D}{2} - \alpha\right)}{\sin F}$.

Do EM = FM nên suy ra : $\dfrac{\sin\left(\dfrac{D}{2} + \alpha\right)}{\sin E} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{D}{2} - \alpha\right)}{\sin F}$

hay $\sin\alpha\cos\dfrac{D}{2}(\sin E + \sin F) = \cos\alpha\sin\dfrac{D}{2}(\sin E - \sin F)$

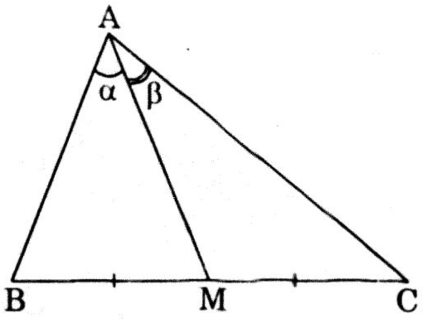
suy ra : $\tan\alpha = \tan\dfrac{D}{2}.\dfrac{\sin E - \sin F}{\sin E + \sin F} = \tan^2\dfrac{D}{2}.\tan\dfrac{E - F}{2}$.

b) Cho ΔABC có AM là trung tuyến và $\widehat{BAM} = \alpha$, $\widehat{CAM} = \beta$. Chứng minh hệ thức : $\tan\dfrac{B - C}{2} = \cot^2\dfrac{\alpha + \beta}{2}.\tan\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

Giải : Ta có (hình 52) :

$S_{ABM} = S_{ACM}$, tức là :

$b\sin\alpha = c\sin\beta$ hay $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.



H.52

Suy ra : $\dfrac{b - c}{b + c} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$

$$= \frac{2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}} = \cot\frac{\alpha + \beta}{2}\tan\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Theo định lí hàm số tang ta lại có :

$$\frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan\dfrac{B - C}{2}}{\tan\dfrac{B + C}{2}} = \frac{\tan\dfrac{B - C}{2}}{\cot\dfrac{A}{2}} = \frac{\tan\dfrac{B - C}{2}}{\cot\dfrac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Từ đó được : $\tan\dfrac{B - C}{2} = \cot^2\dfrac{\alpha + \beta}{2}\tan\dfrac{\alpha - \beta}{2}$.

5. Muốn chứng minh sự tồn tại của một tam giác như trong bài ra chỉ cần chứng tỏ rằng giá trị lớn nhất của các giá trị đã cho nhỏ hơn tổng hai giá trị còn lại, tức là :

$$\sqrt{4m^2 + 3} < \sqrt{m^2 - m + 1} + \sqrt{m^2 + m + 1}.$$

Bình phương hai vế của bất đẳng thức này và biến đổi sẽ được bất đẳng thức : $2m^2 + 1 < 2\sqrt{m^4 + m^2 + 1}$, mà sau khi bình phương lại được bất đẳng thức số thứ nhất.

Áp dụng định lí hàm số côsin ta tìm côsin của góc lớn nhất được :

$$\cos\varphi = -\frac{2m^2 + 1}{2\sqrt{m^2 - m + 1}.\sqrt{m^2 + m + 1}} = -\frac{2m^2 + 1}{2\sqrt{m^4 + m^2 + 1}}.$$

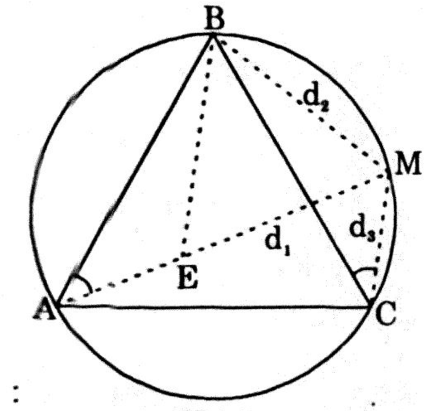
Sau đó tìm sin của góc này : $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{m^4 + m^2 + 1}}$, và tìm được diện tích tam giác bằng :

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + m + 1}.\sqrt{m^2 - m + 1}.\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4},$$ không phụ thuộc m.

- ***Lời bình :*** Tương tự, giải thêm bài toán sau :

Chứng minh tổng các bình phương các khoảng cách từ một điểm M tùy ý đến các đỉnh của một tam giác đều ABC nội tiếp là một đại lượng không đổi (không phụ thuộc vào vị trí của M trên đường tròn).

Giải : Gọi ABC là tam giác đều cạnh a và d_1, d_2, d_3 là các khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác (hình 53).



H.53

Trên AM đặt đoạn ME = d_2 ta được ΔBEM đều. Suy ra ΔABE = ΔCBM, do đó

AE = CM = d_3.

Vậy AM = BM + CM hay $d_1 = d_2 + d_3$.

Áp dụng định lí hàm số côsin vào ΔBMC ta có :

$$a^2 = d_2^2 + d_3^2 - 2d_2d_3\cos 120^\circ = d_2^2 + d_3^2 + d_2d_3$$

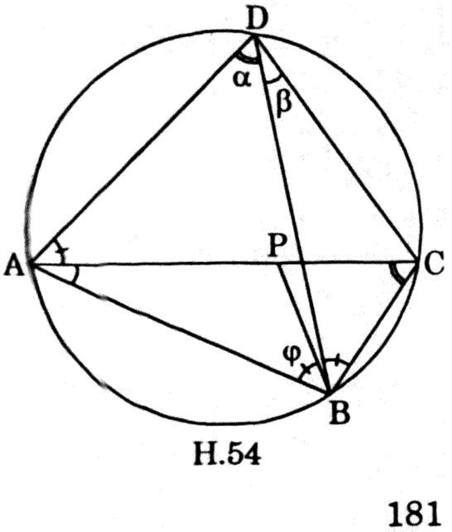
Từ đó : $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (d_2 + d_3)^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2(d_2^2 + d_3^2 + d_2d_3) = 2a^2$,

không phụ thuộc vị trí điểm M trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

6. a) *Cách giải hình học* (hình 54)

Trên đường chéo AC lấy điểm P sao cho $\widehat{ABP} = \varphi$. Xét hai tam giác ΔABP ∽ ΔDBC ta có :

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AP}{DC} \qquad (1)$$



H.54

Lại xét ΔCBP ∽ ΔDBA ta có :

$$\frac{CB}{DB} = \frac{CP}{DA} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) có : $AB.DC = DB.AP$

$$BC.DA = DB.CP$$

Cộng hai đẳng thức này được :

$$AB.DC + BC.DA = DB(AP + CP) = DB.AC.$$

b) *Cách giải áp dụng định lí hàm số sin :*

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD và các góc chắn các dây AB, BC, CD là α, β, φ (hình trên).

Ta có : $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \pi - (\alpha + \beta + \varphi)$ nên áp dụng định lí hàm số sin được : $AB = 2R\sin\alpha$, $BC = 2R\sin\beta$,

$$DC = 2R\sin\varphi, \quad DA = 2R\sin(\alpha + \beta + \varphi).$$

Tổng $AB.DC + BC.DA = 4R^2[\sin\alpha\sin\varphi + \sin\beta\sin(\alpha + \beta + \varphi)]$

$$= 2R^2[\cos(\alpha - \varphi) - \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha + \varphi) - \cos(\alpha + 2\beta + \varphi)]$$

$$= 2R^2[\cos(\alpha - \varphi) - \cos(\alpha + 2\beta + \varphi)]$$

$$= 4R^2.\sin(\alpha + \beta).\sin(\beta + \varphi) \qquad (1)$$

Mặt khác ta lại có $DB = 2R\sin(\beta + \varphi)$, $AC = 2R\sin(\alpha + \beta)$ nên tích $AC.DB = 4R^2.\sin(\alpha + \beta).\sin(\beta + \varphi)$ (2)

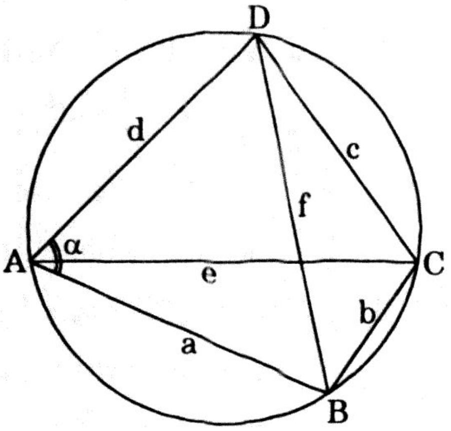
Từ (1) và (2) ta suy ra hệ thức phải chứng minh.

- ***Lời bình :*** *Cách giải thứ ba áp dụng định lí hàm số côsin* (hình 55).

Kí hiệu như ở hình vẽ. Áp dụng định lí hàm số côsin ta có :

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha \qquad (1)$$

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \qquad (2)$$



H.55

Nhân hai vế của (1) với bc, hai vế của (2) với ad rồi cộng lại được :

$$(ad + bc)f^2 = (b^2 + c^2)ad + (a^2 + d^2)bc$$

$$= (ac + bd)(ab + cd)$$

Từ đó có : $f^2 = \dfrac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}$.

Tương tự tìm được : $e^2 = \dfrac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$.

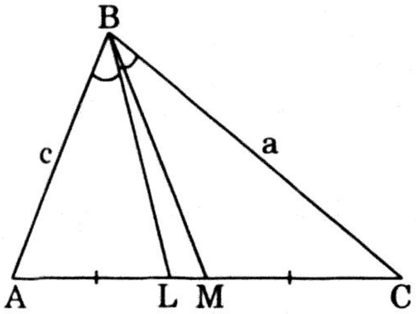
Nhân từng vế hai đẳng thức này ta có ngay hệ thức :

$$ef = ac + bd \quad \text{hay} \quad AC.BD = AB.CD + BC.AD.$$

7. Ta có (hình 56) : $\dfrac{AL}{c} = \dfrac{LC}{a} = \dfrac{AL + LC}{a + c} = \dfrac{b}{a + c}$.

Suy ra : $AL = \dfrac{bc}{a + c}$,

$$LM = \frac{b}{2} - \frac{bc}{a + c} = \frac{b(a - c)}{2(a + c)}.$$



H.56

Từ đó : $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{2S_{\Delta BML}} = \dfrac{b.h_b}{2LM.h_b} = \dfrac{b}{2LM}$

$$= \frac{b}{2.\dfrac{b(a - c)}{2(a + c)}} = \frac{a + c}{a - c} = \frac{\tan\dfrac{A + C}{2}}{\tan\dfrac{A - C}{2}},$$ theo định lí hàm số tang.

- ***Lời bình :***

a) Hãy chứng minh định lí hàm số tang bằng hình học (hình 57)

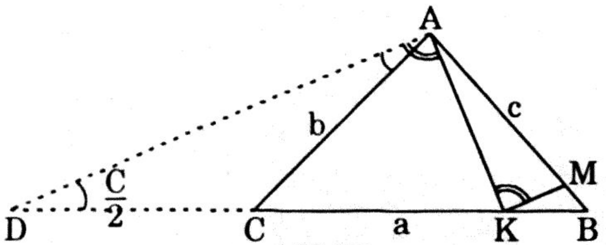
Giải : Giả sử $a > b$. Ta dựng đoạn $BD = a + b$ và $BK = a - b$.

Ta có : $\widehat{ACD} = \pi - \hat{C}$;

$$\widehat{ADC} = \widehat{DAC} = \frac{\pi - (\pi - \hat{C})}{2} = \frac{\hat{C}}{2};$$

$$\widehat{CAK} = \widehat{CKA} = \frac{\pi - \hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{C}}{2};$$

$$\widehat{KAB} = \hat{A} - \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{\hat{A} - \hat{B}}{2}.$$



H.57

Kẻ $KM \,//\, AD$. Các tam giác DAK và AKM là vuông.

Xét $\Delta DAB \backsim \Delta MKB$ ta có :

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{BK}{DB} = \frac{KM}{AD} = \frac{AK\tan\dfrac{A - B}{2}}{AK\tan\dfrac{C}{2}} = \frac{\tan\dfrac{A - B}{2}}{\tan\dfrac{A + B}{2}}.$$

b) Cho ΔABC biết $\hat{A}$, $\hat{B}$ và nửa chu vi p. Tính các cạnh và diện tích của tam giác.

Giải : Ta tính được ngay $\hat{C} = \pi - (\hat{A} + \hat{B})$.

Ta có : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{p}{2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \dfrac{\sqrt{S}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\sin A\sin B\sin C}}$.

Vậy : $a = \dfrac{p\sin A}{2\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \dfrac{p\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{A + B}{2}}$

$$S = \frac{p^2 \sin A \sin B \sin C}{8\cos^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}} = p^2 \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$= p^2 \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\cot\frac{A+B}{2}.$$

8. Ta có : $dh_d = eh_e = fh_f = 2S$

Suy ra : $2h_d = h_e + h_f$ hay $2.\frac{2S}{d} = \frac{2S}{e} + \frac{2S}{f}$.

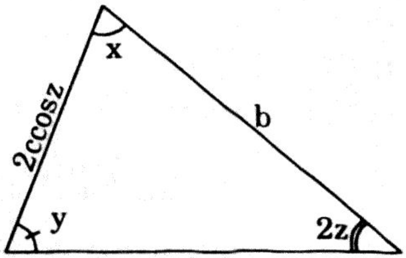
Từ đó có : $\frac{2}{d} = \frac{1}{e} + \frac{1}{f}$ hay $\frac{2}{\sin D} = \frac{1}{\sin E} + \frac{1}{\sin F}$.

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Tìm x, y, z đều dương từ hệ thức : $\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y} = \frac{c}{\sin z}$

với $x + y + 2z = 180^o$ *và a, b, c đều dương.*

Giải : Ta có : $\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y} = \frac{c}{\sin z} = \frac{2c\cos x}{\sin 2x}$, trong đó a, b, 2ccosz là ba cạnh của tam giác (theo định lí hàm số sin).



H.58

Theo định lí hàm số côsin thì (hình 58) :

$$4c^2\cos^2 z = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2z$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab(2\cos^2 z - 1)$$

hay $\cos^2 z(4c^2 + 4ab) = a^2 + b^2 + 2ab$

$\cos^2 z = \frac{(a+b)^2}{4(c^2+ab)}$, vì 2z là góc của tam giác nên $z < 90^o$.

Từ đó $\cos z = \frac{a+b}{2\sqrt{c^2+ab}}$ hay $z = \arccos\frac{a+b}{2\sqrt{c^2+ab}}$.

Lại có : $a^2 = 4c^2\cos^2 z + b^2 - 4bc\cos z\cos x$

$$= \frac{4c^2(a+b)^2}{4(c^2+ab)} + b^2 - 4bc.\frac{a+b}{2\sqrt{c^2+ab}}.\cos x$$

hay $\cos x = \frac{2c^2 + ab - a^2}{2c\sqrt{c^2+ab}}$, vậy $x = \arccos\frac{2c^2 + ab - a^2}{2c\sqrt{c^2+ab}}$.

Tương tự ta có : $y = \arccos\frac{2c^2 + ab - b^2}{2c\sqrt{c^2+ab}}$.

9. Đẳng thức đã cho có thể viết :

$$r_m = r_n + r_p + r = \frac{S}{p-m} = \frac{S}{p-n} + \frac{S}{p-q} + \frac{S}{p}$$

hay $\dfrac{1}{p-m} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p-n} + \dfrac{1}{p-q}$; $\quad \dfrac{m}{p(p-m)} = \dfrac{p-q+p-n}{(p-n)(p-q)}$, **tức là**

$$(q + m - n)(m + n - q) = (m + n + q)(n + q - m)$$

hay $m^2 = n^2 + q^2$. Vậy ΔMNQ vuông tại M.

- ***Lời bình :*** Giải thêm hai bài toán sau về nhận dạng tam giác :

a) Chứng minh rằng ΔDEF cân tại đỉnh F nếu :

$$\frac{\cos^2 D + \cos^2 E}{\sin^2 D + \sin^2 E} = \frac{1}{2}(\cot^2 D + \cot^2 E).$$

b) Chứng minh ΔKLM đều nếu : $\dfrac{k\cos K + l\cos L + m\cos M}{k\sin L + l\sin M + m\sin K} = \dfrac{2p}{9R}$.

Giải :

a) Hệ thức đã cho có thể viết :

$$\frac{\cos^2 D + \cos^2 E}{\sin^2 D + \sin^2 E} - \frac{\cos^2 D}{\sin^2 D} = \frac{\cos^2 E}{\sin^2 E} - \frac{\cos^2 D + \cos^2 E}{\sin^2 D + \sin^2 E}$$

hay $\dfrac{\sin^2 D\cos^2 E - \sin^2 E\cos^2 D}{\sin^2 D} = \dfrac{\sin^2 D\cos^2 E - \sin^2 E\cos^2 D}{\sin^2 E}$,

tức là : $\sin(D + E)\sin(D - E)(\sin^2 D - \sin^2 E) = 0$.

Từ đó có : $\sin(D - E) = 0$, vì $\sin(D + E) \neq 0$, hoặc $\sin D = \sin E$.

Suy ra : $\widehat{D} = \widehat{E}$, tức là ΔDEF cân đỉnh F.

b) Ta có thể viết :

$$k\cos K + l\cos L + m\cos M = R(\sin 2K + \sin 2L + \sin 2M)$$
$$= 4R\sin K\sin L\sin M;$$

$$k\sin L + l\sin M + m\sin K = 2R(\sin K\sin L + \sin L\sin M + \sin M\sin K)$$
$$\geq 2R.3\sqrt[3]{\sin^2 K.\sin^2 L.\sin^2 M} \quad \text{(theo Côsi)}.$$

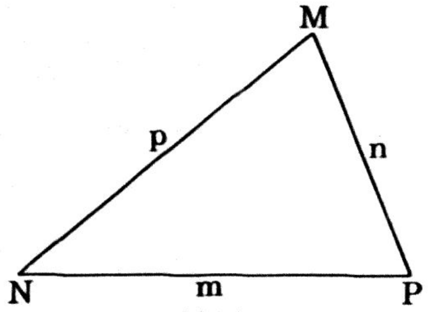
Từ đó : Vế trái $\leq \dfrac{2\sin K\sin L\sin M}{3\sqrt[3]{\sin^2 K\sin^2 L\sin^2 M}} = \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\sin K\sin L\sin M}$.

Vế phải $= \dfrac{2R(\sin K + \sin L + \sin M)}{9R} \geq \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\sin K\sin L\sin M}$.

Như vậy vế phải ≥ vế trái. Do đó hệ thức đã cho tương đương với :

$\sin K = \sin L = \sin M$, suy ra $\widehat{K} = \widehat{L} = \widehat{M}$, tức là ΔKLM là tam giác đều.

10. Theo định lí hàm số sin ta có (hình 59) :



H.59

$$\frac{m}{\sin M} = \frac{n}{\sin N} = \frac{p}{\sin(M+N)}$$

Chu vi $2p = m + n + p$

$$= \frac{m\sin N}{\sin M} + \frac{m\sin(M+N)}{\sin M} + m$$

$$= m + \frac{m}{\sin\alpha}\left[\sin M + \sin(M+\alpha)\right]$$

$$= m + \frac{m}{\sin\alpha}.2\sin\left(M + \frac{\alpha}{2}\right).\cos\frac{\alpha}{2} = m + \frac{m}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\left(M + \frac{\alpha}{2}\right)$$

hay $$2p = m + \frac{m\sin\left(M + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

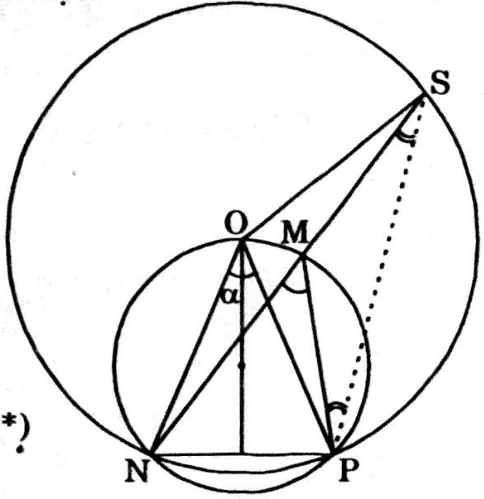
Do α là góc M của tam giác nên $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, do đó $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$. Từ (1) suy ra 2p lớn nhất khi $\sin\left(M + \frac{\alpha}{2}\right)$ lớn nhất, tức là $\sin\left(M + \frac{\alpha}{2}\right) = 1$, hay $M + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$.

Nhưng $\alpha + \widehat{N} + \widehat{P} = 180^\circ$, do đó $\widehat{P} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{N} = \widehat{P}$.

Vậy tam giác cân đáy NP và góc ở đỉnh M = α là tam giác có chu vi lớn nhất.

- ***Lời bình :** Hãy giải bài toán này bằng hình học.*

Giải : Dựng cung chứa góc α căng dây NP. Xét hai tam giác nội tiếp cùng chứa góc α là ΔNPO cân và Δ MNP thường (hình 60).



H.60

Dựng đường tròn tâm O bán kính ON, rồi kéo dài NM cắt (O) tại S.

Ta có :

$NO + OP = NO + OS > NS = NM + MS$ (*)

Nhưng trong ΔPMS thì :

$\widehat{MSP} + \widehat{MPS} = \widehat{NMP} = \widehat{NOP} = 2\widehat{NSP} = 2\widehat{MSP}$.

Do đó : $\widehat{MPS} = \widehat{MSP}$, tức là ΔMPS cân tại M. Thay vào (*) được :

$$NO + OP > NM + MP.$$

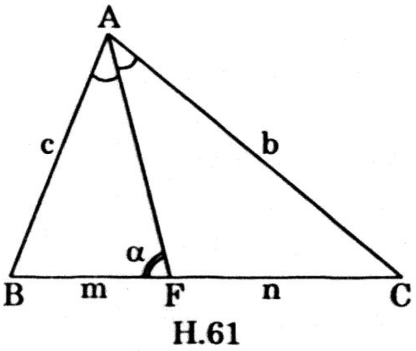
Điều này chứng tỏ tam giác cân ONP có chu vi lớn nhất.

11. Ta phải chứng minh rằng : $AF^2 = bc - mn$ (hình 61).

Theo định lí hàm số côsin ta có :

$$b^2 = AF^2 + n^2 + 2n.AF\cos\alpha$$

$$c^2 = AF^2 + m^2 - 2m.AF\cos\alpha.$$



H.61

Nhân đẳng thức thứ nhất với m, đẳng thức thứ hai với n, rồi cộng lại được :

$$mb^2 + nc^2 = (m + n)(AF^2 + mn) \quad (*)$$

Ta lại có tỉ số $\dfrac{c}{m} = \dfrac{b}{n}$ nên :

$$mb^2 + nc^2 = nc.\frac{mb}{n} + mb\frac{nc}{m} = cmb + bnc = bc(m + n).$$

Thay vào (*) được : $bc = AF^2 + mn$ hay $AF^2 = bc - mn$.

Trong trường hợp $b = c$, $m = n$ thì đẳng thức cần chứng minh trở thành định lí Pytago : $c^2 = AF^2 + m^2$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC là tam giác đều là :

$$a + b + c = 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) \qquad (1)$$

Giải : Điều kiện cần : Ta biết rằng theo định lí hàm số sin thì :

$$a = 2R\sin A = 2R\sin(B + C) = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B$$
$$= b\cos C + c\cos B$$

Tương tự : $b = a\cos C + c\cos A$

$c = b\cos A + a\cos B$

Thay vào vế trái $a + b + c$ của điều kiện (1), rồi chuyển vế phải sang vế trái và nhóm các số hạng được :

$$(a - b)(\cos B - \cos A) + (b - c)(\cos C - \cos B) + (c - a)(\cos A - \cos B) = 0 \quad (2)$$

Điều kiện đủ :

Vì trong một tam giác, đối diện với cạnh lớn là góc lớn và do hàm số cosin là hàm số nghịch biến nên suy ra :

$$(a - b)(\cos B - \cos A) \geq 0, \quad (b - c)(\cos C - \cos B) \geq 0,$$

$$(c - a)(\cos A - \cos B) \geq 0.$$

Từ (2) ta có tổng ba số không âm bằng 0 nên mỗi số hạng phải bằng 0. Từ đó $a = b = c$, tức là ΔABC đều.

§14. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Phương trình lượng giác cơ bản

a) Phương trình $\sin x = a$ có các nghiệm là :

$$x = \alpha + k2\pi \quad \text{và} \quad x = \pi - \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Phương trình $\cos x = a$ có các nghiệm là : $x = \pm\alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình $\tan x = a$ có các nghiệm là : $x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

d) Phương trình $\cot x = a$ có các nghiệm là : $x = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Một số phương trình lượng giác thường gặp

a) Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

Dạng : $a\sin x + b\cos x = c$.

– Cách giải thứ nhất là chia hai vế cho a rồi đặt $\frac{b}{a} = \tan\alpha$, dẫn tới phương trình cơ bản $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$.

– Cách giải thứ hai là chia hai vế cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, dẫn tới phương trình cơ bản $\sin(x + \beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

b) Phương trình thuần nhất bậc hai đối với sinx và cosx

Dạng : $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

Cách giải là chia hai vế cho $\cos^2 x$ dẫn tới giải phương trình :

$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ và cuối cùng thay trực tiếp $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ vào phương trình đã cho để xem nó có phải là nghiệm của phương trình hay không.

c) Phương trình đối xứng với sinx và cosx

Dạng : $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$.

Cách giải là đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $|t| \le \sqrt{2}$

và $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$, dẫn tới giải phương trình $bt^2 + 2at - (b + 2c) = 0$ và chọn nghiệm t thỏa mãn điều kiện $|t| \le \sqrt{2}$.

3. Lưu ý

Với những phương trình lượng giác khác cần phải sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đưa về các phương trình đã xét như : sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng, biến đổi tổng thành tích, công thức hạ bậc, v.v...

Không có một phương pháp tổng quát nào để giải mọi phương trình lượng giác.

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. Giải các phương trình lượng giác sau :

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$　　b) $\cos 7y - \sin 5y = \sqrt{3}(\cos 5y - \sin 7y)$.

2. Giải :

a) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$　　b) $\sin^2 y + \sin^2 2y = \sin^2 3y$.

3. Giải :

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = 0$　　b) $\sin^4 y + \cos^4 y = \frac{5}{8}$.

4. Giải :

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

b) $\sin y + \sin 2y + \sin 3y = 1 + \cos y + \cos 2y$.

5. Giải :

a) $\tan x + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$　　b) $\sin 2x + \tan x - 2 = 0$.

6. Giải :

a) $4\cos x.\sin^2 x = \cos x - \sin x$　　b) $\sin y.\sin 2y.\sin 3y = \frac{1}{4}\sin 4y$.

7. Tìm tất cả giá trị của a để hệ sau có nghiệm và giải hệ đó :

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1 \\ \cos x \sin 2y = a. \end{cases}$$

8. Tìm tất cả nghiệm của hệ : $\begin{cases} 8\cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0 \\ x + y = \alpha. \end{cases}$

Với giá trị nào của α thì giải được ?

9. Khử x và y từ hệ $\begin{cases} a\sin^2 x + b\cos^2 x = 1 \\ a\cos^2 x + b\sin^2 y = 1 \\ a\tan x = b\tan y. \end{cases}$

10. Giải hệ : $\begin{cases} \tan x + \dfrac{1}{\tan x} = 2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \tan y + \dfrac{1}{\tan y} = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

11. Giải hệ : $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin(x + y) \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

*** Lưu ý:** Trong cách giải ta có ($k \in \mathbb{Z}$)

1. a) Phương trình đã cho có thể viết $\cos 2x = \sin x$ hay $\cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Từ đó : $2x + \dfrac{\pi}{2} - x = k2\pi$; $2x - \dfrac{\pi}{2} + x = k2\pi$

Vậy: $x_1 = (4k - 1)\dfrac{\pi}{2}$ và $x_2 = (4k + 1)\dfrac{\pi}{6}$.

b) Nhóm và nhân hai vế với $\dfrac{1}{2}$ được :

$$\frac{1}{2}\cos 7y + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7y = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5y + \frac{1}{2}\sin 5y$$

hay $\sin\dfrac{\pi}{6}.\cos 7y + \cos\dfrac{\pi}{6}.\sin 7y = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos 5y + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin 5y$

hay $\sin\left(7y + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(5y + \dfrac{\pi}{3}\right)$

Từ đó: $\left[\begin{array}{l} 7y + \dfrac{\pi}{6} - 5y - \dfrac{\pi}{3} = k2\pi \\ 7y + \dfrac{\pi}{6} + 5y + \dfrac{\pi}{3} = (2k + 1)\pi \end{array}\right.$

Vậy : $y_1 = (12k + 1)\dfrac{\pi}{12}$ và $y_2 = (4k + 1)\dfrac{\pi}{24}$.

- ***Lời bình :*** *Giải thêm hai phương trình sau :*

c) $\sin(8x + 60^\circ) + \sin 2x = 0$ *d)* $\sin 2y = (\cos y - \sin y)^2$.

Giải : Ta có :

c) $\sin(8x + 60^\circ) = -\sin 2x = \sin(-2x)$.

Do đó : $8x + 60^\circ - 2x = (2k + 1).180^\circ$; $8x + 60^\circ + 2x = 2k.180^\circ$.

Vậy $x_1 = k.60^\circ + 20^\circ$ và $x_2 = k.36^\circ - 6^\circ$

d) $\sin 2y = \cos^2 y + \sin^2 y - 2\sin y\cos y$ hay $\sin 2y = 1 - \sin 2y$

tức là $2\sin 2y = 1$.

Vậy $\sin 2y = \frac{1}{2}$, suy ra $2y = k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{6}$. Vậy: $y = k\frac{\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{12}$.

2. Ta có :

a) $\sin^2 2x = 1 - \sin^2 x$ hay $4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x = 0$; $\cos^2 x(4\sin^2 x - 1) = 0$.

Từ đó : $\cos x = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

$\sin x = \pm\frac{1}{2}$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

b) Phương trình đã cho có thể biến đổi như sau :

$$\frac{1-\cos 2y}{2} + \frac{1-\cos 4y}{2} = \frac{1-\cos 6y}{2} \text{ hay } \cos 2y + \cos 4y = 1 + \cos 6y$$

$\Leftrightarrow 2\cos 3y\cos y = 2\cos^2 3y$; $\cos 3y(\cos y - \cos 3y) = 0$.

Từ đó : α) $\cos 3y = 0$, $y = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

β) $\cos y - \cos 3y = 0$, $2\sin 2y\sin y = 0$

$\sin y = 0$, $y = k\pi$ hoặc $\sin 2y = 0$, $y = \frac{k\pi}{2}$

Vậy : $y_1 = (2k+1)\frac{\pi}{6}$ và $y_2 = k.\frac{\pi}{2}$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải các phương trình :*

c) $\sin 3x = \cos x - \sin x$ *d)* $\sin 3y + \sin 2y = \sin y$.

Giải : Ta có :

c) $\sin 3x + \sin x = \cos x$ hay $2\sin 2x\cos x - \cos x = 0$; $\cos x(2\sin 2x - 1) = 0$.

Từ đó : $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

$\sin 2x = \frac{1}{2}$, $2x = k\pi + (-1)^k.\frac{\pi}{6}$

Vậy : $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x_2 = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k\frac{\pi}{12}$.

d) $\sin 3y - \sin y = \sin 2y$. Sau khi biến đổi được :

$$\sin y.\sin\frac{3y}{2}.\sin\frac{y}{2} = 0.$$

Từ đó : $\sin y = 0,\ y = k\pi;\ \sin\frac{3y}{2} = 0,\ y = \frac{k2\pi}{3};\ \sin\frac{y}{2} = 0,\ y = 2k\pi.$

Vậy : $x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{k2\pi}{3}.$

3. a) Phân tích thành nhân tử được : $(\cos^2x + \sin^2x)(\cos^2x - \sin^2x) = 0.$

Từ đó : $\tan^2x = 1,\quad x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi.$

Vậy : $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi.$

b) Ta biết rằng $(\sin^2y + \cos^2y) = 1$, **do đó phương trình đã cho có thể viết** : $\sin^4y + \cos^4y = \frac{5}{8}(\sin^2y + \cos^2y)^2$

hay $3\sin^4y + 3\cos^4y - 10\sin^2y\cos^2y = 0;$

$3\tan^4y - 10\tan^2y + 3 = 0$

Giải phương trình trùng phương này được :

$\tan y = \pm\sqrt{3},\ y = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi;$

$\tan y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3},\ y = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

Vậy : $y_1 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ và $y_2 = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải các phương trình sau :*

c) $\sin^4x - \cos^4x = \frac{1}{2}$ *d)* $\sin^5y - \cos^5y = \frac{1}{\cos y} - \frac{1}{\sin y}.$

Giải : Ta có :

c) $(\sin^2x + \cos^2x)(\sin^2x - \cos^2x) = \frac{1}{2}.$

Từ đó : $\cos 2x = -\frac{1}{2},\ 2x = \pm\frac{2}{3}\pi + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Vậy : $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi.$

d) $\begin{cases}\cos y \neq 0\\ \sin y \neq 0\end{cases}$ hay $y \neq \frac{k\pi}{2}$

Quy đồng mẫu ở vế phải rồi áp dụng công thức :

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$, được :

$\sin y\cos y(\sin y - \cos y)(\sin^4y + \sin^3y\cos y + \sin^2y\cos^2y + \sin y\cos^3y + \cos^4y)$
$= \sin y - \cos y.$

Suy ra : hoặc $\sin y - \cos y = 0$ (1), mà nghiệm là $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$

hoặc $\sin y\cos y(\sin^4 y + \sin^3 y\cos y + \sin^2 y\cos^2 y + \sin y\cos^3 y +$

$+ \cos^4 y + \sin^2 y\cos^2 y) - 1 = 0$ (2)

Ta biến đổi (2) bằng cách áp dụng :

$$\sin^4 y + \cos^4 y = (\sin^2 y + \cos^2 y)^2 - 2\sin^2 y\cos^2 y$$

và $\sin^3 y\cos y + \cos^3 y\sin y = \sin y\cos y$, rồi đặt $\sin y\cos y = t$, được :

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \quad \text{hay} \quad (t-1)^2(t+1) = 0.$$

Nếu $t = 1$ tức là $\sin y\cos y = 1$, thì $\sin 2y = 2$, không thể được.

Nếu $t = -1$ thì $\sin 2y = -2$, cũng không thể được. Do đó phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là nghiệm của (1), tức là

$$y = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

4. a) Phương trình đã cho có thể viết :

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 0 \quad \text{hay} \quad \sin 2x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Từ đó : $\sin 2x = 0$, $2x = k\pi$;

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2},\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

Vậy : $x_1 = k\frac{\pi}{2}$ và $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$. .

b) Phương trình đã cho có thể viết :

$$\sin y + \sin 3y + \sin 2y = 1 + \cos 2y + \cos y$$

hay $2\sin 2y\cos y + \sin 2y = 2\cos^2 y + \cos y$;

$$\sin 2y(2\cos y + 1) = \cos y(2\cos y + 1);$$

$$2\sin y\cos y(2\cos y + 1) - \cos y(2\cos y + 1) = 0$$

$$\cos y(2\cos y + 1)(2\sin y - 1) = 0.$$

Từ đó : $\cos y = 0$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

$$2\cos y + 1 = 0,\ \cos y = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

$$2\sin y - 1 = 0,\ \sin y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$$

Vậy : $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x_2 = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$; $x_3 = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$.

- ***Lời bình :*** *Giải thêm hai phương trình sau :*

c) $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

d) $\sin^3 y(1 + \cot y) + \cos^3 y(1 + \tan y) = \cos 2y.$

Giải :

a) Ta có : $\sin^2 2x = \sin 3x + \sin x$ hay $\sin^2 2x - 2\sin 2x\cos x = 0$

$\sin 2x(\sin 2x - 2\cos x) = 0;$ $2.\sin 2x\cos x(\sin x - 1) = 0.$

Từ đó : $\sin 2x = 0,\ x = k\dfrac{\pi}{2};$ $\cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi;$

$\sin x = 1,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$

Nhưng nghiệm của hai phương trình cuối chứa trong nghiệm củ phương trình thứ nhất.

Vậy $x = k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm của phương trình đã cho.

d) Điều kiện : $y \neq \dfrac{k\pi}{2}$. Phương trình đã cho có thể viết :

$$\frac{\sin^3 y(\sin y + \cos y)}{\sin y} + \frac{\cos^3 y(\sin y + \cos y)}{\cos y} = \cos 2y$$

hay $(\sin y + \cos y)(\sin^2 y + \cos^2 y) = \cos^2 y - \sin^2 y;$

$(\sin y + \cos y)(1 + \sin y - \cos y) = 0.$

Từ đó : $\sin y + \cos y = 0,\ y = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

$\cos y - \sin y = 1,\ y = k2\pi;\ y = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

Nghiệm của phương trình cuối không thỏa mãn phương trình đã ch vì các giá trị này sẽ làm cho siny hoặc cosy bằng 0.

Vậy $y = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

5. a) Ta có : $\tan x + \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 2$, tức là $\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0.$

Giá trị tanx = 1 không phải là nghiệm, nên phương trình đã cho c nghiệm là : $\tan x = 2 \pm \sqrt{3},\ x = k\pi + \arctan(2 \pm \sqrt{3})$.

b) Điều kiện : $y \neq k\pi$. Ta biết rằng: $\sin 2y = \dfrac{2\tan y}{1 + \tan^2 y}$.

Thay giá trị của $\sin 2y = \dfrac{1 + \tan y}{1 - \tan y}$ vào phương trình đã cho, sau kh rút gọn được : $\tan^3 y - 2\tan^2 y + 3\tan y - 2 = 0$

hay $(\tan y - 1)(\tan y - \tan y + 2) = 0$. Từ đó :

$\tan y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $\tan^2 y - \tan y + 2 = 0$, vô nghiệm.

Vậy $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *giải các phương trình sau :*

c) $\cot x + 3\tan x - \frac{5}{\sin x} = 0$ *d)* $\tan y + \tan 2y = \tan 3y$.

Giải : Ta có :

c) Điều kiện : $x \neq \frac{k\pi}{2}$

$\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{3\sin x}{\cos x} - \frac{5}{\sin x} = 0$ hay $\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sin x\cos x} = 0$,

tức là : $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$.

Từ đó : $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$; $\left(\cos x = -\frac{13}{4}, \text{ loại}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

d) Điều kiện : $y \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

$\frac{\sin 3y}{\cos y\cos 2y} = \frac{\sin 3y}{\cos 3y}$ hay $\frac{\sin 3y(\cos 3y - \cos y\cos 2y)}{\cos y\cos 2y\cos 3y} = 0$.

Thay $\cos 3y = \cos(y + 2y)$ ở tử được :

$\frac{\sin y\sin 2y\sin 3y}{\cos y\cos 2y} = 0$ hay $\tan y.\tan 2y.\tan 3y = 0$.

Từ đó : $\tan y = 0$, $y = k\pi$; $\tan 2y = 0$, $y = k\frac{\pi}{2}$; $\tan 3y = 0$, $y = k\frac{\pi}{3}$.

Với k chẵn thì nghiệm của phương trình thứ hai là trường hợp riêng của nghiệm của phương trình thứ nhất (k lẻ không thỏa mãn). Nhưng nghiệm của phương trình thứ nhất lại là trường hợp riêng của nghiệm của phương trình thứ ba với k là bội của 3.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $y = k\frac{\pi}{3}$.

6. a) Ta có : $4\sin^2 x\cos x = 2\sin x\sin 2x = \cos x - \cos 3x$

Do đó phương trình đã cho có dạng :

$\cos x - \cos 3x = \cos x - \sin x$ hay $\cos 3x = \sin x$; $\cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Từ đó : $3x \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = k2\pi$ hay $2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Vậy : $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

b) Vế phải của phương trình có thể viết : $\frac{1}{4}\sin 4y = \frac{1}{2}\sin 2y\cos 2y$.

Do đó phương trình đã cho có dạng :

$$2\sin y.\sin 2y.\sin 3y = \sin 2y.\cos 2y;$$

$$\sin 2y(2\sin y\sin 3y - \cos 2y) = 0$$

Vì $2\sin y\sin 3y = \cos 2y - \cos 4y$, nên ta có : $\sin 2y\cos 4y = 0$, từ đó :

$$\sin 2y = 0,\ 2y = k\pi; \quad \cos 4y = 0,\ 4y = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Vậy : $y_1 = k\frac{\pi}{2}$, $y_2 = (2k+1)\frac{\pi}{8}$

- ***Lời bình :*** *Giải thêm hai phương trình sau :*

c) $\sin^3 x + \sin^3 2x + \cos^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$

d) $\sin^{10} y + \cos^{10} y = \frac{29}{16}\cos^4 2y$.

Giải :

c) Ta đặt : $\sin x = a$, $\sin 2x = b$, $\sin 3x = c$, được :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3.$$

Biểu thức này có thể phân tích thành nhân tử :

$$3(a + b)(b + c)(a + c) = 0, \text{ tức là :}$$

$$(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin x + \sin 3x) = 0 \quad (*)$$

Biết rằng : $\sin x + \sin 2x = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$$\sin 2x + \sin 3x = 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x.$$

Thay các giá trị này vào biểu thức (*) và biến đổi được :

$$\sin\frac{3x}{2}.\sin\frac{5x}{2}.\cos^2\frac{x}{2}.\sin 2x\cos x = 0.$$

Từ đó : $\sin\frac{3x}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{k2\pi}{3}$; $\sin\frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{k2\pi}{5}$;

$\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x_3 = (2k+1)\pi$; $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x_4 = \frac{k\pi}{2}$;

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x_5 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Nhưng nghiệm x_3 và x_5 chứa trong x_4, nên nghiệm của phương trình đã cho là : $x = \frac{2k}{3}\pi$; $x = \frac{2k}{5}\pi$; $x = \frac{k}{2}\pi$.

d) Ta có : $(\sin^2 y)^5 + (\cos^2 y)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2y$

Thay $\sin^2 y = \frac{1 - \cos 2y}{2}$; $\cos^2 y = \frac{1 + \cos 2y}{2}$, được :

$$\left(\frac{1 - \cos 2y}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2y}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2y$$

hay $(1 - \cos 2y)^5 + (1 + \cos 2y)^5 = 58\cos^4 2y$.

Sau khi biến đổi ta được phương trình trùng phương :

$$24\cos^4 2y - 10\cos^2 2y - 1 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm :

$$\cos 2y = \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2y = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi;$$

$$\cos 2y = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2y = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi.$$

Vậy : $y_1 = \pm\frac{\pi}{8} + k\pi$; $y_2 = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi$.

7. Vì vế trái của phương trình thứ nhất của hệ không vượt quá 1 nên hệ chỉ có nghiệm khi a = 0. Khi đó ta có hệ : $\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1 \\ \cos x \sin 2y = 0. \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai này suy ra hoặc cosx = 0, hoặc sin2y = 0.

– Nếu cosx = 0 thì với $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ từ phương trình thứ nhất ta tìm được $y_1 = n\pi$, và với $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ta được $y_2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$.

– Nếu sin2y = 0 thì không có thêm nghiệm nào mới.

Vậy hệ đã cho chỉ giải được khi a = 0 và có hai họ nghiệm :

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2m\pi,\ y_1 = n\pi;$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ y_2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *với giá trị nào của* α *thì hệ :*

$$\begin{cases} x - y = \alpha \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \end{cases}$$ *có nghiệm ?*

Tìm các nghiệm đó.

Giải : Áp dụng công thức : $\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x + y)\cos(x - y)$,

ta có thể viết phương trình thứ hai của hệ dưới dạng :

$$4\cos(x - y)\cos(x + y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \qquad (*)$$

So sánh vế trái và vế phải của (*) ta có :

$$|4\cos(x - y)\cos(x + y)| \le 4|\cos\alpha|$$

Mặt khác từ bất đẳng thức $(1 \pm 2\cos\alpha)^2 \ge 0$ suy ra :

$4|\cos\alpha| \le 1 + 4\cos^2\alpha$. Ngoài ra dấu "=" chỉ xảy ra khi $2|\cos\alpha| = 1$.

Do đó hệ gồm (*) và $x - y = \alpha$ chỉ có thể có nghiệm với điều kiện $|\cos\alpha| = \frac{1}{2}$.

Ta xét hai khả năng :

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Từ (*) ta tìm được $\cos(x + y) = 1$, tức là $x + y = k2\pi$.

Giải hệ $\begin{cases} x - y = \alpha \\ x + y = k2\pi \end{cases}$ được : $x_1 = \frac{\alpha}{2} + k\pi,\ \ y_1 = -\frac{\alpha}{2} + k\pi$.

b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Bằng cách giải tương tự ta có :

$$x_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{\alpha}{2}, \quad y_2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{\alpha}{2}.$$

8. Bài toán này tương tự như bài toán 7 ở trên. Ta hãy giải bằng cách khác. Áp dụng công thức $\cos x\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + (x + y)]$ ta có thể viết phương trình thứ nhất như sau :

$$4\cos^2(x - y) + 4\cos(x + y)\cos(x - y) + 1 = 0$$

Đặt $\cos(x - y) = t$ và lưu ý rằng $x + y = \alpha$, ta được phương trình :

$$4t^2 + 4t\cos\alpha + 1 = 0 \qquad (*)$$

Phương trình này chỉ có nghiệm khi $\Delta = 16(\cos^2\alpha - 1) \ge 0$, tức là khi $|\cos\alpha| = 1$. Xét hai trường hợp :

a) Nếu $\cos\alpha = 1$ thì từ (*) suy ra $t = \cos(x - y) = -\frac{1}{2}$.

Ta có hệ $\begin{cases} x - y = \pm\frac{2}{3}\pi + k2\pi \\ x + y = \alpha. \end{cases}$

Giải ra được : $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi + \frac{\alpha}{2}; \quad y_1 = \mp\frac{\pi}{3} - k\pi + \frac{\alpha}{2}$.

b) Nếu $\cos\alpha = -1$ thì bằng cách giải tương tự được :

$$x_2 = k\pi + \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{6}; \qquad y_2 = \frac{\alpha}{2} - k\pi \mp \frac{\pi}{6}.$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Tìm cos(x + y) nếu x và y thoa mãn hệ : $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b. \end{cases}$

Giải : Bình phương hai phương trình của hệ đã cho, được :

$$\sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y = a^2$$

$$\cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y = b^2.$$

Cộng từng vế hai đẳng thức này, được :

$$2 + 2\cos(x - y) = a^2 + b^2 \tag{1}$$

$$\cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x + y) = b^2 - a^2 \tag{2}$$

Phương trình (2) có thể biến đổi thành dạng sau :

$$2\cos(x + y)[\cos(x - y) + 1] = b^2 - a^2 \tag{3}$$

Từ (1) và (3) ta tìm được : $\cos(x + y) = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$.

9. Điều kiện $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Hai phương trình đầu của hệ có thể biến đổi thành dạng : $(a - 1)\tan^2 x = 1 - b$ (1)

$$(b - 1)\tan^2 y = 1 - a \tag{2}$$

Nhưng $a \neq 1$ vì nếu $a = 1$ thì từ (1) ta có $b = 1$ trái với điều kiện $a \neq b$. Tương tự, nếu $b = 1$ thì $a = 1$. Vậy ta có thể chia (1) cho (2) được :

$$\left(\frac{\tan x}{\tan y}\right)^2 = \left(\frac{1 - b}{1 - a}\right)^2.$$

Lại lưu ý thêm rằng $a \neq 0$. Thật thế, nếu $a = 0$ thì từ phương trình thứ hai ta được $\sin y \neq 0$ và từ phương trình thứ ba được $b = 0$, tức là $a = b = 0$, không thể được.

Với điều lưu ý này, từ phương trình thứ ba ta có :

$$\left(\frac{\tan x}{\tan y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}. \quad \text{Như thế : } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1 - b}{1 - a}\right)^2.$$

Nếu $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1 - b}{1 - a}$ thì $a = b$, không thể được.

Nếu $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1 - b}{1 - a}$ thì $a + b = 2ab$.

Vậy sau khi khử x và y ta được hệ thức $a + b = 2ab$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *biểu thị cosα và sinβ qua M và N biết*

sinα = Msinβ và tanα = Ntanβ.

Giải : Hệ thức thứ hai có thể viết phối hợp với hệ thức thứ nhất :

$$\frac{M\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{N\sin\beta}{\cos\beta} \quad \text{hay} \quad \sin\beta(M\cos\beta - N\cos\alpha) = 0.$$

Đẳng thức cuối này chỉ đúng hoặc với $\sin\beta = 0$ và khi đó $\sin\alpha = 0$, $\cos\beta = \pm1$, $\cos\alpha = \pm1$, hoặc với $M\cos\beta - N\cos\alpha = 0$ nên với trường hợp cuối này thì được hệ : $\begin{cases}\sin\alpha = M\sin\beta \\ M\cos\beta = N\cos\alpha\end{cases}$ (1)

Bình phương mỗi phương trình và áp dụng công thức $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ và $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$, ta được hệ :

$$\begin{cases}\cos^2\alpha + M^2\sin^2\beta = 1 \\ N^2\cos^2\alpha + M^2\sin^2\beta = M^2\end{cases} \quad (2)$$

Từ đó ta tìm được $\cos^2\alpha$ và $\sin^2\beta$ khi và chỉ khi $M^2(1 - N^2) \neq 0$.

Vậy : $\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 - M^2}{1 - N^2}}$, $\sin\beta = \pm\dfrac{1}{M}\sqrt{\dfrac{M^2 - N^2}{1 - N^2}}$.

* *Lưu ý* : Ta xét trường hợp riêng khi $M^2(1 - N^2) = 0$.

Nếu $M = 0$ thì từ (1) ta được $\cos\alpha = \pm1$ và $N = 0$, như thế $\cos\alpha = \pm1$ còn $\sin\beta$ không xác định.

Nếu $N^2 = 1$ thì các phương trình đã cho không chứa các tham số M và N nên việc biểu thị cosα và sinβ qua M và N không còn ý nghĩa.

10. Trước tiên ta xét phương trình thứ nhất.

Theo bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ với mọi a, b là số thực thì ta có :

$$\left|\tan x + \frac{1}{\tan x}\right| \geq 2, \text{ dấu "=" chỉ xảy ra khi } \tan x = 1 \text{ và } \tan x = -1.$$

Do vế phải của phương trình thứ nhất phải thỏa mãn điều kiện

$\left|2\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \leq 2$ nên phương trình này chỉ có thể thỏa mãn trong các trường hợp sau :

a) $\begin{cases}\tan x = 1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1\end{cases}$ (1) b) $\begin{cases}\tan x = -1 \\ \sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1\end{cases}$ (2)

Hệ (1) có nghiệm là $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, y_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2l\pi$ (3)

Hệ (2) có nghiệm là $x_2 = -\frac{\pi}{4} + m\pi,\ \ y_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ **(4)**

Ta thấy rằng nghiệm (3) không thỏa mãn phương trình thứ hai của hệ đã cho, nhưng nghiệm (4) chỉ thỏa mãn phương trình thứ hai (tức là tất cả hệ đã cho) khi m lẻ. Đặt $m = 2k + 1$ thì nghiệm (4) là nghiệm của hệ đã cho sẽ có dạng : $x = \frac{3}{4}\pi + k2\pi,\ \ y = -\frac{3}{4}\pi + n2\pi$

- ***Lời bình :***

a) Có thể giải cách khác như sau :

Vì tanx và $\frac{1}{\tan x}$ đồng dấu nên từ hệ đã cho theo bất đẳng thức Côsi ta được :

$$2\left|\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\tan x + \frac{1}{\tan x}\right| = |\tan x| + \left|\frac{1}{\tan x}\right| \geq 2$$

$$2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\tan y + \frac{1}{\tan y}\right| = |\tan y| + \left|\frac{1}{\tan y}\right| \geq 2$$

Do vế trái ≤ 2 nên suy ra :

$$\left|\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1,\quad |\tan x| = 1 \quad \text{và} \quad \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1,\quad |\tan y| = -1.$$

Vì chúng đồng dấu nên lại suy ra :

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1,\quad \tan x = 1 \quad \text{hay} \quad \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1,\quad \tan x = -1.$$

Giải các hệ này và thay vào các hệ :

$$\begin{cases}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1\\ \tan y = 1\end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1\\ \tan y = -1\end{cases}$$

để được nghiệm như đã tìm.

b) *Giải thêm hệ sau :* $\begin{cases}\tan x + \tan y = 1 - \tan x \tan y & (1)\\ \sin 2y + \sqrt{3}\sin 2x = 2 & (2).\end{cases}$

Giải : Điều kiện $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Với điều kiện này vế phải của (1) khác 0 vì nếu trái lại thì $0 = 1 - \tan x \tan y = \tan x + \tan y$, suy ra $\tan y = -\tan x$. Thay vào vế phải của (1) được : $0 = 1 + \tan^2 x$, vô lí !

Chia hai vế của (1) cho $1 - \tan x \tan y \neq 0$ được :

$$1 = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \tan(x + y), \text{ suy ra } x + y = \frac{\pi}{4} + n\pi \ \text{ nên}$$

$$y = \frac{\pi}{4} + n\pi - x \quad \text{và} \quad \sin 2y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi - 2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x$$

Phương trình (2) trở thành : $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 2$, suy ra :

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1, \text{ từ đó } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Vậy $2x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$y = \frac{\pi}{4} + n\pi - \frac{\pi}{6} - k\pi = \frac{\pi}{12} + (n-k)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

11. Phương trình thứ nhất có thể biến đổi thành :

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\right) = 0.$$

Do đó phương trình này thỏa mãn với các trường hợp sau :

a) $x = -y + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $y = 2l\pi$, x là bất cứ số nào.

c) $x = 2m\pi$, y là bất cứ số nào.

Trường hợp a) kết hợp được với phương trình thứ hai chỉ với điều kiện $k = 0$. Thật thế, từ a) suy ra bất đẳng thức $|x| + |y| \geq |k|2\pi$ và với điều kiện $|x| + |y| = 1$ thì chỉ xảy ra khi $k = 0$.

Như vậy giải hệ $\begin{cases} x = -y \\ |x| + |y| = 1, \end{cases}$

ta được : $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = -\frac{1}{2}$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

Lí luận tương tự với hai trường hợp b) và c) còn lại ta được thêm các cặp nghiệm sau :

$$x_3 = 1, y_3 = 0; \ x_4 = -1, y_4 = 0 \ \text{ và } \ x_5 = 0, y_5 = 1; \quad x_6 = 0, y_6 = -1.$$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm như trên.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Tìm điều kiện của a, b, c để hệ sau có ít nhất một nghiệm :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a \\ \cos x + \cos y = 2b \\ \tan x . \tan y = c. \end{cases}$$

Giải : Để nguyên phương trình thứ ba, ta bình phương hai phương trình thứ nhất và thứ hai, được hệ :

$$\begin{cases}(\sin x + \sin y)^2 = 4a^2 \\ (\cos x + \cos y)^2 = 4b^2 \qquad (*) \\ \tan x.\tan y = c.\end{cases}$$

Ta phải tìm điều kiện của a, b, c để hệ này có ít nhất một nghiệm.

Giả sử x_1, y_1 là nghiệm của hệ (*), có thể xảy ra một trong bốn khả năng sau :

hoặc $\sin x_1 + \sin y_1 = 2a$; $\cos x_1 + \cos y_1 = 2b$

hoặc $\sin x_1 + \sin y_1 = -2a$; $\cos x_1 + \cos y_1 = 2b$

hoặc $\sin x_1 + \sin y_1 = -2a$; $\cos x_1 + \cos y_1 = -2b$

hoặc $\sin x_1 + \sin y_1 = 2a$; $\cos x_1 + \cos y_1 = -2b$.

Nếu xảy ra trường hợp thứ nhất thì x_1, y_1 là nghiệm của hệ đã cho.

Trong trường hợp thứ hai thì hệ đã cho có nghiệm chẳng hạn $-x_1$, $-y_1$.

Trong trường hợp thứ ba thì nghiệm là $\pi + x_1$, $\pi + y_1$.

Trong trường hợp thứ tư thì nghiệm là $\pi - x_1$, $\pi - y_1$.

Vậy hệ đã cho có ít nhất một nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có ít nhất một nghiệm.

Thế thì khi nào hệ (*) có nghiệm ? Cộng và trừ hai phương trình của hệ (*) ta được :

$$\cos(x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1$$

$$\cos 2x + \cos 2y + 2\cos(x + y) = 4(b^2 - a^2)$$

hay $$\cos(x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1$$

$$\cos(x + y)\cos(x - y) + \cos(x + y) = 2(b^2 - a^2).$$

Từ đó : $$\cos(x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1$$

$$(a^2 + b^2)\cos(x + y) = b^2 - a^2.$$

Cuối cùng ta có hệ sau đây tương đương với hệ (*) :

$$\begin{cases}\cos(x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1 \\ (a^2 + b^2)\cos(x + y) = b^2 - a^2 \\ \tan x.\tan y = c.\end{cases}$$

– Nếu $a^2 + b^2 = 0$ thì phương trình thứ hai thỏa mãn với mọi x và y. Từ phương trình thứ nhất ta được :

$$x - y = \pi + k2\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Phương trình thứ ba cho $\tan(y + \pi + k2\pi)\tan y = c$ hoặc $\tan^2 y = c$.

Phương trình cuối này có nghiệm với mọi $c \geq 0$.

– Nếu $a^2 + b^2 \neq 0$ ta có :

$$\begin{cases} \cos(x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1 \\ \cos(x + y) = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \end{cases} \qquad (\alpha)$$

Hệ cuối này có nghiệm khi và chỉ khi $|2(a^2 + b^2) - 1| \leq 1$; $\left|\dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}\right| \leq 1$ với điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$. Khi đó rõ ràng bất đẳng thức thứ nhất tương đương với $0 < a^2 + b^2 \leq 1$.

Vế trái của phương trình thứ ba có thể viết :

$$\tan x.\tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]}.$$

Thay các giá trị của $\cos(x + y)$ và $\cos(x - y)$ từ (α) ta sẽ thấy rằng nghiệm của hệ (α) sẽ thỏa mãn phương trình thứ ba của hệ đã cho nếu

$$c = \frac{2(a^2 + b^2) - 1 - \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}}{\dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} + 2(a^2 + b^2) - 1} = \frac{(a^2 + b^2)^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}.$$

Vậy ta sẽ được kết quả sau đây : Hệ đã cho có ít nhất một nghiệm trong hai trường hợp :

a) $0 < a^2 + b^2 \leq 1$ và $c = \dfrac{(a^2 + b^2)^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}$.

b) $a = b = c = 0$ và c là mọi số không âm.

§15. DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM VỮNG

1. Dãy số

a) Người ta thường cho dãy số bằng một trong các cách sau :

- Cho số hạng tổng quát của nó bằng công thức;
- Cho một mệnh đề mô tả các số hạng liên tiếp của nó;
- Cho bằng phương pháp truy hồi.

b) Dãy số được gọi là tăng nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n \le u_{n+1}$.

Nếu $u_n > u_{n+1}$ thì dãy số được gọi là giảm.

Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là *dãy số đơn điệu.*

c) Dãy số được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n \le M$. Nếu $u_n \ge m$ thì dãy số được gọi là bị chặn dưới.

Dãy số được gọi là *bị chặn* nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M và m sao cho $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $m \le u_n \le M$.

2. Cấp số cộng, cấp số nhân

a) *Cấp số cộng* là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi gọi là công sai d.

$u_{n+1} = u_n + d.$ Kí hiệu $\div\, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

- Số hạng tổng quát của một cấp số cộng được cho bởi công thức :

$$u_n = u_1 + (n-1)d.$$

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng kề bên nó, tức là :

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \ge 2).$$

- Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng có thể tính theo hai công thức :

$$S_n = \frac{1}{2}n\left[2u_1 + (n-1)d\right] \quad \text{(theo } u_1 \text{ và } d\text{)}$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(u_1 + u_n) \quad \text{(theo } u_1 \text{ và } u_n\text{).}$$

b) ***Cấp số nhân*** **là một dãy số** (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số **hạng thứ hai, mỗi số hạng đều** là tích của số hạng đứng ngay trước nó **với một số không đổi gọi là** công bội q.

$u_{n+1} = u_n.q$ Kí hiệu ÷÷ $u_1, u_2, ..., u_n, ...$

- **Số hạng tổng quát của một cấp** số nhân được cho bởi công thức :

$$u_n = u_1.q^{n-1}.$$

- **Trong một cấp số nhân ta cũng** có công thức $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$.
- **Tổng n số hạng của một cấp số nhân** được tính theo công thức :

$$S_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

B. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

1. **Cho dãy số Fibônaxi : 1; 1; 2; 3; 5; ...**

Viết tiếp bảy số hạng của dãy số. Tìm công thức tổng quát của dãy số **Fibônaxi.**

2. **a) Cho dãy số (u_n) xác định bởi** $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 4$. **Chứng minh rằng dãy số này bị chặn trên bởi 8.**

b) Tại sao dãy số $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới.

3. **Cho dãy số với số hạng tổng quát** $a_n = \sqrt{n(n + 2)(n + 4)(n + 6)}$.

Tìm số hạng chia hết cho 7 của dãy số.

4. **Chứng minh rằng nếu a, b, c là** các số hạng thứ p, q, r của một cấp số **cộng thì** : $(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$.

5. **Gọi $c_1, c_2, ..., c_n$ là các số hạng** của một cấp số cộng với $c_1 = 0$. Rút gọn **biểu thức :**

$$S = \frac{c_3}{c_2} + \frac{c_4}{c_3} + ... + \frac{c_n}{c_{n-1}} - c_2\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + ... + \frac{1}{c_{n-2}}\right).$$

6. **Chứng minh rằng với mỗi** cấp số cộng $d_1, d_2, d_3, ...$ ta đều có :

a) $S = \frac{1}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_2}} + \frac{1}{\sqrt{d_2} + \sqrt{d_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{d_{n-1}} + \sqrt{d_n}} = \frac{n - 1}{\sqrt{d_1} + \sqrt{d_n}}$

b) $T = d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - d_4^2 + ... + d_{2k-1}^2 - d_{2k}^2 = \frac{k}{2k - 1}\left(d_1^2 - d_{2k}\right)^2.$

7. Chứng minh rằng nếu ba số dương m, n, p tạo thành một cấp số cộng thì ba số $\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ cũng tạo thành một cấp số cộng.

8. a) Tìm cấp số cộng mà tổng ba số hạng đầu bằng 27 và tổng các bình phương của ba số hạng đó bằng 275.

b) Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng bằng $S_n = 3n^2 + 4n$. Tìm cấp số cộng đó.

9. Tìm tỉ lệ giữa các nghiệm của một phương trình trùng phương biết rằng các nghiệm này lập thành một cấp số cộng.

10. Cho cấp số cộng 1, 18, 35, ... Tìm các số hạng của cấp số đó có thể viết với các chữ số 3.

11. Tìm ba số lập thành một cấp số nhân nếu tổng của chúng bằng 21 và tổng các số nghịch đảo của chúng bằng $\frac{7}{12}$.

12. a) Xen giữa các số 1 và 256 ba số trung bình nhân (tức là ba số để tạo thành cấp số nhân).

b) Xen giữa các số $\frac{e^2}{f^3}$ và $\frac{f^2}{e^3}$ chín số trung bình nhân.

13. Tính tổng của n số hạng 1, 11, 111, 1111, ...

14. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số hạng thứ p, q, r của một cấp số cộng cũng như của một cấp số nhân thì : $a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b} = 1$.

15. Có hay không ba số vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân ?

16. Giả sử $u_1, u_2, ..., u_n$ là các số hạng của một cấp số nhân có công bội q và tổng $S_m = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tính các tổng sau :

a) $S_1 + S_2 + ... + S_n$

b) $\frac{1}{u_1^2 - u_2^2} + \frac{1}{u_2^2 - u_3^2} + ... + \frac{1}{u_{n-1}^2 - u_n^2}$.

17. a) Các số hạng của một cấp số cộng có thể là ba số $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ không ? Ba số này có thể là các số hạng của một cấp số nhân không ?

b) Ba số liên tiếp 11, 12 và 13 có thể là các số hạng của một cấp số nhân không ?

18. a) Tìm số hạng thứ nhất của một cấp số nhân vô hạn mà tổng các số hạng bằng 36 và tổng bốn số hạng đầu bằng $33\frac{3}{4}$.

b) Tổng các số hạng của một cấp số nhân vô hạn là 12,5 và tổng hai số hạng đầu bằng 12. Tìm cấp số đó.

19. a) Tìm cấp số nhân vô hạn bắt đầu bằng 3 biết tổng các số hạng của nó bằng $\frac{7}{2}$.

b) Chứng minh rằng các số $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \ldots$ tạo thành một cấp số nhân vô hạn và tìm tổng các số hạng của nó.

20. Chứng minh rằng ta có thể tìm cấp số nhân vô hạn $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ mà mỗi số hạng của nó hơn kém tổng các số hạng sau nó một thừa số không đổi k. Với giá trị nào của k thì bài toán có lời giải ?

C. CÁCH GIẢI VÀ LỜI BÌNH

1. Ta thấy rằng : trừ hai số hạng đầu là 1 và 1, số hạng thứ ba u_3 bằng tổng hai số hạng đầu $u_3 = 1 + 1 = 2$, số hạng thứ tư $u_4 = 1 + 2 = 3$ bằng tổng hai số hạng thứ hai và thứ ba, số hạng thứ năm $u_5 = u_3 + u_4 = 2 + 3 = 5$; ...

Từ đó ta có thể viết tiếp bảy số hạng nữa như sau :

$u_6 = u_4 + u_5 = 3 + 5 = 8$; $u_7 = u_5 + u_6 = 5 + 8 = 13$;

$u_8 = u_6 + u_7 = 8 + 13 = 21$; $u_9 = u_7 + u_8 = 13 + 21 = 34$;

$u_{10} = u_8 + u_9 = 21 + 34 = 55$; $u_{11} = u_9 + u_{10} = 34 + 55 = 89$;

và $u_{12} = u_{10} + u_{11} = 55 + 89 = 144$.

Vậy công thức tổng quát của dãy số Fibônaxi là :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (\text{với } n \geq 3).$$

- ***Lời bình :*** *Chứng minh rằng tổng của 8 số Fibônaxi liên tiếp không phải là số Fibônaxi.*

Giải : Ta hãy xét tổng của 8 số Fibônaxi liên tiếp sau đây :

$$S_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+8}.$$

Vì dãy số Fibônaxi là dãy đơn điệu tăng :

$$u_1 = u_2 < u_3 < u_4 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots$$

nên rõ ràng bài toán sẽ được chứng minh nếu ta chứng minh được rằng tổng S_k nằm giữa u_{k+9} và u_{k+10}, tức là :

$$u_{k+9} < S_k < u_{k+10}.$$

Nhưng rõ ràng :

$$u_{k+9} = u_{k+8} + u_{k+7} < u_{k+8} + u_{k+7} + u_{k+6} + \ldots + u_{k+1} = S_k,$$

như thế chỉ còn phải chứng minh bất đẳng thức $S_k < u_{k+10}$.

Dễ thấy rằng tổng $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ của n số Fibônaxi đầu tiên số hạng u_{n+2} là 1 đơn vị. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học.

Thật vậy, ta có : $S_2 = 1 + 1 = 3 - 1 = u_4 - 1$, mặt khác nếu đúng với n thì với n + 1 theo giả thiết quy nạp ta có :

$$S_{n+1} = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1}$$

$$= (u_{n+2} - 1) + u_{n+1} = (u_{n+1} + u_{n+2}) - 1 = u_{n+3} - 1.$$

Bây giờ ta có ngay :

$$S_k = u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_{k+8} = S_{k+8} - S_k$$

$$= (u_{k+10} - 1) - (u_{k+2} - 1) = u_{k+10} - u_{k+2} < u_{k+10}.$$

* *Lưu ý* : Ta cũng có thể chứng minh rằng tổng của m số Fibônaxi liên tiếp, trong đó $m \geq 3$, không thể là số Fibônaxi.

2. a) Ta thấy rằng khi n = 1 thì $u_1 = 0$ nên $u_1 < 8$.

Giả sử $u_k < 8$ ta chứng minh rằng $u_{k+1} < 8$. Thật vậy ta có :

$$\frac{u_n}{2} + 4 < \frac{1}{2}.8 + 4 = 8. \quad \text{Suy ra} \quad u_{n+1} < 8.$$

b) Dãy số $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới vì $0 < \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3}$ với mọi n = 1, 2, 3, ...

- ***Lời bình :*** Xét thêm bài toán sau :

Cho dãy số $u_1, u_2, u_3, \ldots$ được tạo thành theo quy tắc sau :

$$u_1 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}} \quad \text{với } n > 1.$$

Chứng minh rằng : $14 < u_{100} < 18$.

Giải : Do với n > 1 ta có :

$$u_n^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} > u_{n-1}^2 + 2$$

nên từ $u_1^2 = 1$ ta được : $u_2^2 > 1 + 2 = 3$, $u_3^2 > 1 + 2.2 = 5$,

$$u_4^2 > 1 + 3.2 = 7, \ \ldots, \ u_{100}^2 > 1 + 99.2 = 199 \qquad (1)$$

Từ đó suy ra $u_{100} > \sqrt{199} > 14$. Tương tự, áp dụng bất đẳng thức :

$$u_n^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = u_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{u_{n-1}^2} \leq u_{n-1}^2 + 3$$

cũng đúng với mọi n > 1 (dấu "=" xảy ra chỉ khi n = 2) ta được :

$u_2^2 = 1 + 3 = 4,\quad u_3^2 < 1 + 2.3 = 7,\quad u_4^2 < 1 + 3.3 = 10, \ldots$

$\ldots,\ u_{100}^2 < 1 + 99.3 = 298.$

Từ đó suy ra : $u_{100} < \sqrt{298} < 18$ (2)

Từ (1) và (2) ta có : $14 < u_{100} < 18$.

3. Nhân biểu thức dưới dấu căn như sau : $n(n + 6) = n^2 + 6n$;

$(n + 2)(n + 4) = n^2 + 6n + 8$, rồi đặt biểu thức $n^2 + 6n = k$. Ta được biểu thức dưới dấu căn là $k^2 + 8k$, và do

$$k^2 + 6k + 9 < k^2 + 8k < k^2 + 8k + 16$$

nên $\left|\sqrt{k^2 + 8k}\right| = k + 3$, vì thế $a_n = n^2 + 6n + 3 = (n + 3)^2 - 6$.

Vậy a_n chia hết cho 7 khi và chỉ khi $(n + 3)^2$ chia cho 7 dư 6. Nhưng bình phương của một số tự nhiên khi chia cho 7 chỉ cho số dư là 0, 1, 4 và 2. Do đó a_n không chia hết cho 7.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm tất cả số hạng của dãy số mà số hạng tổng quát là* $a_n = \sqrt{n(n + 2)(n + 4)(n + 6)}$ *và là số hữu tỉ.*

Giải : Theo bài trên, ta phải tìm giá trị k sao cho số $k^2 + 8k$ là bình phương của một số hữu tỉ, trong khi đó căn bậc hai của một số tự nhiên không thể là phân số.

Nếu $k^2 + 8k = m^2$ thì $(k + 4)^2 - m^2 = 16$. Nhưng $k = n^2 + 6n \geq 7$, $k + 4 \geq 11$, và hiệu nhỏ nhất $(k + 4)^2 - m^2 \geq 121 - 100 = 21$, vì thế không thể có số hạng nào của dãy số đã cho lại là số hữu tỉ.

4. Nếu a_n là số hạng thứ n, a_m là số hạng thứ m thì :

$a_n = a_1 + d(n - 1)$

$a_m = a_1 + d(m - 1)$, trong đó d là công sai.

Suy ra : $a_n - a_m = (n - m)d$.

Theo bài ra thì :

$$b - c = (q - r)d,\quad c - a = (r - p)d,\quad a - b = (p - q)d.$$

Nhân đẳng thức thứ nhất với a, đẳng thức thứ hai với b, đẳng thức thứ ba với c, được :

$$d[(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c] = a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$$

Từ đó ta có ngay : $(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Trong một cấp số cộng ta có $\dfrac{S_p}{S_q} = \dfrac{p^2}{q^2}$. *Chứng minh rằng* $\dfrac{a_p}{a_q} = \dfrac{2p - 1}{2q - 1}$.

Giải : Ta có : $S_p = \dfrac{a_1 + a_p}{2}.p,\quad S_q = \dfrac{a_1 + a_q}{2}.q$

Theo bài ra thì : $\dfrac{a_1 + a_p}{a_1 + a_q} = \dfrac{p}{q}$ hay $\dfrac{2a_1 + (p-1)d}{2a_1 + (q-1)d} = \dfrac{p}{q}$.

Từ đó : $2a_1(q - p) + [(p - 1)q - (q - 1)p]d = 0$

Vì thế : $a_p = a_1 + (p - 1)d = \dfrac{d}{2} + (p - 1)d = \dfrac{2p - 1}{2}.d$

$$a_q = \frac{2q - 1}{2}.d$$

Vậy : $\dfrac{a_p}{a_q} = \dfrac{2p - 1}{2q - 1}$.

5. Giả sử $c_2 = d$. Thế thì $c_k = c_1 + d(k - 1) = d(k - 1)$ vì $c_1 = 0$ (gt).

Vậy : $S = \dfrac{2}{1} + \dfrac{3}{2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n-2} - \left(1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n-3}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n-2}\frac{k+1}{k} - \sum_{1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} = \sum_{1}^{n-2}\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \sum_{1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-2}$$

$$= \sum_{1}^{n-2}\frac{1}{k} - \sum_{1}^{n-2}\frac{1}{k} + \frac{1}{n-2} = n - 2 + \frac{1}{n-2}$$

$$= \frac{(n-2)d}{d} + \frac{d}{(n-2)d} = \frac{c_{n-1}}{c_2} + \frac{c_2}{c_{n-1}}.$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Tìm tổng tất cả các số có hai chữ số mà khi chia cho 4 dư 1.

Giải : Các số khi chia cho 4 dư 1 phải có dạng $4k + 1$. Chúng tạo thành cấp số cộng công sai 4.

Số đầu tiên phải là 13 (ứng với $k = 3$), số cuối cùng là 97.

Áp dụng công thức $a_n = a_1 + d(n - 1)$ ta có $97 = 13 + (n - 1).4$. Suy ra $n = 22$. Do $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ ta tìm được $S_{22} = \dfrac{13 + 19}{2}.22 = 1210$.

* *Lưu ý* : Nếu bài ra chỉ là *"Tìm tổng tất cả các số có hai chữ số"* thì cách giải như sau :

Các số có hai chữ số lập thành một cấp số cộng có công sai $d = 1$, số hạng $a_1 = 10$, số hạng $a_n = 99$. Ta tìm được số các số hạng là $n = 90$.

Vậy $S_n = \dfrac{10 + 99}{2}.90 = 4905$.

6. a) Nhân tử và mẫu của mỗi phân số ở vế trái với biểu thức liên hợp của mẫu được :

$$S = \frac{\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1}}{d_2 - d_1} + \frac{\sqrt{d_3} - \sqrt{d_2}}{d_3 - d_2} + \ldots + \frac{\sqrt{d_n} - \sqrt{d_{n-1}}}{d_n - d_{n-1}}$$

$$= \frac{1}{d}\left(\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1} + \sqrt{d_3} - \sqrt{d_2} + \ldots + \sqrt{d_n} - \sqrt{d_{n-1}}\right) = \frac{\sqrt{d_n} - \sqrt{d_1}}{d}$$

vì $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = \ldots = d_n - d_{n-1} = d$.

Từ đó ta có :

$$S = \frac{\sqrt{d_n} - \sqrt{d_1}}{d} = \frac{d_n - d_1}{d\left(\sqrt{d_n} + \sqrt{d_1}\right)} = \frac{n-1}{\sqrt{d_n} - \sqrt{d_1}}.$$

b) Ta có : $d_1^2 - d_2^2 = (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = -d(d_1 + d_2)$

$$d_3^2 - d_4^2 = (d_3 - d_4)(d_3 + d_4) = -d(d_3 + d_4)$$

……………………………………………………………

$$d_{2k-1}^2 - d_{2k}^2 = (d_{2k-1} - d_{2k})(d_{2k-1} + d_{2k}) = -d(d_{2k-1} + d_{2k})$$

Vậy $S = -d(d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \ldots + d_{2k-1} + d_{2k}) = -d.\frac{d_1 + d_{2k}}{2}.2k$

Nhưng $d_{2k} = d_1 + d(2k - 1)$; $d_1 - d_{2k} = -d(2k - 1)$, do đó :

$$S = -d(2k-1).\frac{d_1 + d_{2k}}{2k-1}.k = \frac{k}{2k-1}\left(d_1^2 - d_{2k}^2\right).$$

- ***Lời bình :*** Tương tự, *gọi T(m) là tổng của m số hạng đầu tiên của một cấp số cộng, chứng minh rằng :*

$$T(m + 3) - 3T(m + 2) + 3T(m + 1) - T(m) = 0.$$

Giải : Ta có : $T(m + 2) - T(m + 1) = a_{m+2}$;

$$T(m + 3) - T(m) = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3}.$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh : $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} - 3a_{m+2} = 0$.

Nhưng ta có thể chứng minh rằng : $\frac{a_r + a_s}{2} = a_{\frac{r+s}{2}}$ (nếu r và s cùng tính chẵn).

Thật thế : $a_r + a_s = 2a_1 + (s - 1)d + (r - 1)d$

$$= 2\left[a_1 + \left(\frac{r+s}{2} - 1\right)d\right] = 2a_{\frac{r+s}{2}},$$

cho nên $a_{m+1} + a_{m+3} = 2a_{m+2}$, vậy : $a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} - 2a_{m+2} = 0$.

7. Theo bài ra ta có : $n - m = p - n = d$ và $p - m = 2d$.

Giả sử $A_1 = \dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{m}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{p}}$, $\quad A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{m}}$,

ta chứng minh rằng $A_1 = A_2$.

Nếu $d = 0$ thì $m = n = p$ và $A_1 = A_2 = 0$. Do đó ta cho rằng $d \neq 0$. Trục căn ở mẫu được :

$$A_1 = \frac{\sqrt{p}-\sqrt{m}}{2d} + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{p}}{d} = \frac{2\sqrt{n}-\sqrt{p}-\sqrt{m}}{2d}$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{m}}{d} - \frac{\sqrt{p}-\sqrt{m}}{2d} = \frac{2\sqrt{n}-\sqrt{p}-\sqrt{m}}{2d}$$

Vậy $A_1 = A_2$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *chứng minh rằng dãy số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ với $n \geq 3$ mà thỏa mãn điều kiện :* $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \dfrac{1}{a_3a_4} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}a_n} = \dfrac{n-1}{a_1a_n}$

thì dãy số này là một cấp số cộng.

Giải : Với $n = 3$ ta có : $\dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} = \dfrac{2}{a_1a_3}$.

Từ đó $\dfrac{1}{a_1a_2} - \dfrac{1}{a_1a_3} = \dfrac{1}{a_1a_3} - \dfrac{1}{a_3a_2}$, vậy $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$. Vì thế chỉ cần chứng minh rằng với mọi $n \geq 4$, ta có : $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$.

Trong điều kiện đã cho ở trên ta viết với các trường hợp $n - 2$, $n - 1$ và n được :

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-3}a_{n-2}} = \frac{n-3}{a_1a_{n-2}} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}} = \frac{n-2}{a_1a_{n-1}} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n} \qquad (3)$$

Từ đó, lấy (3) trừ (2) được :

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{1}{a_1a_n} = (n-2)\frac{a_{n-1}-a_n}{a_1a_{n-1}a_n}$$

Lấy (1) trừ (2) được :

$$\frac{1}{a_{n-2}a_{n-1}} - \frac{1}{a_1a_{n-2}} = (n-2).\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{a_1a_{n-1}a_{n-2}}$$

Quy đồng mẫu rồi rút gọn sẽ có : $a_1 - a_{n-1} = (n-2)(a_{n-1} - a_n)$

$$a_1 - a_{n-1} = (n-2)(a_{n-2} - a_{n-1}).$$

Vậy $a_{n-1} - a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$.

8. a) Theo bài ra ta có hệ phương trình : $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 275. \end{cases}$

Ngoài ra $\dfrac{a_1 + a_2}{2}.3 = 27$ hay $a_1 + a_2 = 18$.

Giải ra được $a_2 = 9$. Do đó hệ ở trên trở thành $\begin{cases} a_1 + a_3 = 18 \\ a_1^2 + a_3^2 = 194. \end{cases}$

Giải ra được $a_1 = 5$, $a_3 = 13$.

Vậy cấp số cộng phải tìm là $\div$ 5; 9; 13; ...

b) Với n = 1 ta có : $S_1 = a_1 = 7$.

Với n = 2 ta có : $S_2 = a_1 + a_2 = 7 + a_2 = 20$, vậy $a_2 = 13$.

Cấp số cộng phải tìm là $\div$ 7; 13; 19; ...

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm bốn số chẵn lập thàn[illegible] một cấp số cộng trong đó tích của tổng ba số cuối nhân với tổng hai [illegible] đầu và cuối bằng lập phương của nửa tổng hai số đầu.*

Giải : Ta có thể viết như sau :

$$a_1 = 2k, \quad a_2 = 2k + 2m = 2(k+m)$$

$$a_3 = 2k + 4m = 2(k + 2m)$$

$$a_4 = 2k + 6m = 2(k + 3m)$$

Theo bài ra thì : $12(k+2m)(2k+3m) = (2k+m)^3$.

Từ đẳng thức cuối này suy ra $(2k+m)^3$ phải chia hết cho 4 nên m phải chia hết cho 2, tức là m = 2p. Vì vậy đẳng thức cuối này có dạng :

$$3(k+4p)(k+3p) = (k+p)^3 \quad (*)$$

Từ đó suy ra k + p chia hết cho 3, tức là k + p = 3t.

Đẳng thức (*) có thể biến đổi thành :

$$(3t+2p)(t+p) = 3t^3 \text{ hay } 2p^2 + 5tp - 3t^2(t-1) = 0.$$

Giải ra được : $p_1 = \dfrac{-5t + t\sqrt{24t+1}}{4}$ (loại p_2 âm)

Từ đó $k = 3t - p_1 = \dfrac{17t - t\sqrt{24t+1}}{4}$.

Ta phải có $k \geq 0$ hay $17 \geq \sqrt{24t+1}$, tức là $t \leq 12$. Do đó phải chọn t sao cho biểu thức dưới căn $24t + 1$ là số chính phương, do đó các giá trị của t là 1; 2; 5; 7 và 12.

Vậy ta được bốn đáp số sau : 6; 6; 6; 6   10; 14; 18; 22

14; 70; 126; 182 và 0; 144; 288; 432.

9. Nếu phương trình trùng phương có bốn nghiệm thực thì chúng từng đôi bằng nhau về giá trị tuyệt đối nhưng trái dấu nhau. Gọi chúng là $\pm a_1$, $\pm a_2$.

Giả sử $a_1 > a_2$. Theo bài ra bốn số này lập thành một cấp số cộng nên ta có thể viết : $-a_1, -a_2, a_2, a_1$ (1)

Suy ra : $-2a_2 = a_2 - a_1$; $2a_2 = a_1 - a_2$.

Từ đó : $\pm 3a_2 = \mp a_1$ (2)

Từ (1) và (2) được : $-3a_2; -a_2; a_2; 3a_1$.

Vậy giữa bốn nghiệm của phương trình trùng phương có tỉ lệ sau :

$$(-3) : (-1) : 1 : 3.$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Một cấp số cộng có đẳng thức : $\dfrac{S_p}{S_t} = \dfrac{p^2}{t^2}$. *Chứng minh rằng :*

$$\frac{a_p}{a_t} = \frac{2p-1}{2t-1}.$$

Giải : Ta có : $S_p = \dfrac{2a_1 + (p-1)d}{2}.p$; $S_t = \dfrac{2a_1 + (t-1)d}{2}.t$

Theo bài ra : $\dfrac{[2a_1 + (p-1)d].p}{[2a_1 + (t-1)d].t} = \dfrac{p^2}{t^2}$ hay $(2a_1 - d)(p - t) = 0$ (với $p \neq t$)

Suy ra $a_1 = \dfrac{d}{2}$.

Vậy : $\dfrac{a_p}{a_t} = \dfrac{a_1 + (p-1)d}{a_1 + (t-1)d} = \dfrac{\dfrac{d}{2} + (p-1)d}{\dfrac{d}{2} + (t-1)d} = \dfrac{2p-1}{2t-1}$.

10. Ta có : $a_n = 1 + 17(n-1) = 333...3$

Suy ra số có dạng 333...3 khi chia cho 17 có số dư là 1.

Số đầu tiên thỏa mãn bài ra là số viết với bốn chữ số 3 tức là số 3333 với $n = 197$.

Các số hạng của cấp số cộng là các số chứa $16k + 4$ chữ số 3 ($k = 0, 1, 2, 3, ...$) vì khi chia số 333...3 cho 17 không còn dư thì chu kì gồm 16 chữ số.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *từ dãy số tự nhiên 1, 2, 3, 4, ... ta lập những nhóm mà số cuối cùng của nhóm đó là một bình phương, chẳng hạn 1; (2, 3, 4); (5, 6, 7, 8, 9); (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16); ...*

  Hỏi nhóm thứ k có bao nhiêu số hạng và tìm tổng các số hạng của nhóm đó.

  Giải : Ta thấy ngay rằng nhóm thứ k chứa 2k – 1 số hạng. Số hạng của nhóm phải là k^2, số hạng cuối của nhóm thứ (k – 1) bằng $(k-1)^2$. Do đó số hạng đầu tiên của nhóm thứ k phải là $(k-1)^2 + 1$.

  Ta có tổng : $S_k = \dfrac{\left[(k-1)^2 + 1 + k^2\right](2k-1)}{2} = (k^2 - k + 1)(2k - 1)$

  Vậy nhóm thứ k có 2k – 1 số hạng và tổng các số hạng của nó bằng $(k^2 - k + 1)(2k - 1)$.

11. Áp dụng công thức $S = \dfrac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$ ta có : $635 = u_1(2^7 - 1)$.

Từ đó tìm được : $u_1 = 5$, $u_n = 5.2^6 = 320$.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm số hạng u_p của một cấp số nhân biết các số hạng $u_m = s$, $u_n = t$.*

  Giải : Ta có : $u_m = u_1.q^{m-1}$, $u_n = u_1q^{n-1}$.

  Chia đẳng thức thứ nhất cho đẳng thức thứ hai và thay u_m, u_n bằng các giá trị của chúng được : $\dfrac{s}{t} = q^{m-n}$, từ đó $q = \sqrt[m-n]{\dfrac{s}{t}}$.

  Vậy $u_1 = \sqrt[m-n]{\dfrac{t^{m-1}}{s^{n-1}}}$. Nhưng $u_p = u_1.q^{p-1}$ nên thay u_1 và q bằng các giá trị của chúng, ta có : $u_p = \sqrt[m-n]{\dfrac{s^{p-n}}{t^{p-m}}}$.

12. a) Ta có : $256 = 1.q^4$ (q là công bội).

Từ đó : $q^4 = 256$ nên q = 4. Ba số xen kẽ là 4; 16; 64, tức là ta có cấp số nhân ÷÷ 1, 4, 16, 64, 256.

b) Ta có : $q^{10} = \dfrac{e^2}{f^3} : \dfrac{f^2}{e^3} = \left(\dfrac{e}{f}\right)^5$ hay $q^2 = \dfrac{e}{f}$. Từ đó công bội $q = \pm\sqrt{\dfrac{e}{f}}$ (nếu e và f đều dương).

Với q > 0 thì chín số xen kẽ là :

$\dfrac{e^2}{f^3}\sqrt{\dfrac{e}{f}}$; $\dfrac{f}{e^2}$; $\dfrac{f}{e^2}\sqrt{\dfrac{e}{f}}$; $\dfrac{1}{e}$; $\dfrac{1}{e}\sqrt{\dfrac{e}{f}}$; $\dfrac{1}{f}$; $\dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{e}{f}}$; $\dfrac{e}{f^2}$ và $\dfrac{e}{f^2}\sqrt{\dfrac{e}{f}}$.

Với q < 0 thì chín số xen kẽ là :

$$-\frac{e^2}{f^3}\sqrt{\frac{e}{f}};\quad \frac{f}{e^2};\quad -\frac{f}{e^2}\sqrt{\frac{e}{f}};\quad \frac{1}{e};\quad -\frac{1}{e}\sqrt{\frac{e}{f}};\quad \frac{1}{f};\quad -\frac{1}{f}\sqrt{\frac{e}{f}};\quad \frac{e}{f^2}\quad \text{và}\quad -\frac{e}{f^2}\sqrt{\frac{e}{f}}.$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau về tìm công bội :

Một cấp số nhân có số các số hạng là số chẵn và tổng các số hạng của nó gấp ba lần tổng các số hạng ở vị trí lẻ. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Giải : Từ bài ra ta suy ra rằng tổng các số hạng ở vị trí chẵn gấp đôi tổng các số hạng ở vị trí lẻ, tức là :

$$\frac{u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n}}{u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1}} = 2.$$

Thay các số hạng $u_2, u_4, u_6, \ldots, u_{2n}$ bằng $u_2 = u_1.q$, $u_4 = u_3.q$, ..., $u_{2n} = u_{2n-1}.q$, ta tìm được công bội q = 2.

* *Bị chú* : Ta có thể chứng minh rằng :

Trong một cấp số nhân gồm một số chẵn các số hạng thì tỉ số giữa tổng các số hạng ở vị trí chẵn và tổng các số hạng ở vị trí lẻ bằng công bội của cấp số.

Thật vậy, ta có : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{u_6}{u_5} = \ldots = \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = q.$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có thể viết :

$$\frac{u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n}}{u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1}} = q \quad \text{(đpcm).}$$

13. Ta phải tính tổng sau đây : $S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots$

Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân ta có :

$$1 + 10 = \frac{10^2 - 1}{9};\qquad 1 + 10 + 100 = \frac{10^3 - 1}{9};$$

....

$$1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Do $1 = \frac{10 - 1}{9}$ nên cộng tất cả vế phải của các đẳng thức trên được :

$$S_n = \frac{1}{9}(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - n) = \frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right).$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Chứng minh rằng các số 49, 4489, 444889, ... do số thứ hai 4489 có *được từ việc xen số 48 giữa hai chữ số 4 và 9, v.v... đều là số chính phương (bình phương của các số nguyên).*

Giải : Dạng tổng quát của các số đã cho như sau :

$$\underbrace{44...4}_{n}\underbrace{88...89}_{n-1} = 4.\underbrace{11...1}_{n}.10^n + 8.\underbrace{11...1}_{n} + 1$$

Số $\underbrace{11...1}_{n}$ có thể viết dưới dạng tổng các số hạng của một cấp số nhân có công bội 10 :

$$\underbrace{11...1}_{n} = 1 + 10 + 10^2 + ... + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Như vậy ta có :

$$\frac{4}{9}(10^n - 1)10^n + \frac{8}{9}(10^n - 1) + 1 = \frac{4}{9}.10^{2n} + \frac{4}{9}.10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2.10^n + 1}{3}\right)^2.$$

14. Ta có : $b - a = d(q - r)$; $c - b = d(r - q)$; $c - a = d(r - p)$

Mặt khác : $a = u_1w^{p-1}$; $b = u_1w^{q-1}$; $c = u_1w^{r-1}$ trong đó u_1 là số hạng đầu tiên và w là công bội của cấp số nhân. Do đó :

$$a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b} = a^{d(q-r)}.b^{d(r-p)}.c^{d(p-q)}$$

$$= u_1^{d(q-r)+d(r-p)+d(p-q)}.w^{d[(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)+(p-q)(r-1)]}$$

Dễ thấy rằng : $d(q - r) + d(r - p) + d(p - q) = 0$

$$(p - r)(p - 1) + (r - p)(q - 1) + (p - q)(r - 1) = 0$$

Vậy $a^{b-c}.b^{c-a}.c^{a-b} = 1$.

- ***Lời bình :*** Có thể giải thêm bài toán sau :

Gọi u_1, u_2, u_3, ... là các số hạng của một cấp số nhân. Biết rằng :

$$S = u_1 + u_2 + ... + u_n, \quad S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$$

Tính tích $P = u_1u_2...u_n$.

Giải : Áp dụng công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân ta có :

$$S = \frac{u_nq - u_1}{q - 1}, \qquad S' = \frac{\frac{1}{u_n}.\frac{1}{q} - \frac{1}{u_1}}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{u_nq - u_1}{q - 1}.\frac{1}{u_nu_1}$$

Vậy $\frac{S}{S'} = u_nu_1$. Mặt khác : $P^2 = (u_1u_2...u_n)^2 = (u_1u_n)^2$, do đó $P = \left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}$.

15. Gọi ba số chưa biết là m, n và p.

Nếu chúng lập thành một cấp số nhân thì $n^2 = m.p$ (1)

Nếu chúng lập thành một cấp số cộng thì $2n = m + p$ (2)

Khử n từ (1) và (2) được : $(m + p)^2 = 4mp$, hay $(m - p)^2 = 0$, từ đó $m = p$ và thay vào (2) được $n = m$.

Suy ra $m = n = p$.

Vậy ba số đó phải bằng nhau thì mới đồng thời lập thành một cấp số cộng và một cấp số nhân.

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm các điều kiện để ba số a, b, c là số hạng của cùng một cấp số cộng hoặc nhân.*

Giải : Ba số phải tìm có thể theo thứ tự từ nhỏ đến lớn hoặc từ lớn đến nhỏ.

α) Nếu chúng là các số hạng của một cấp số cộng thì chúng phải là các số trung bình cộng giữa các số a và b, b và c. Gọi số trung bình cộng đó là $(m - 1)$ và $(n - 1)$ tương ứng, thế thì công sai của cấp số cộng bằng $\frac{b-a}{m}$ hoặc $\frac{c-b}{m}$, từ đó $\frac{b-a}{m} = \frac{c-b}{m}$.

Đó là điều kiện phải tìm.

β) Giả sử a là số hạng đầu tiên của cấp số nhân, m và n là số các số hạng ta có : $b = aq^m$, $c = aq^n$.

Khử công bội q từ hai đẳng thức trên ta được :

$$\frac{b^n}{c^m} = \frac{a^n}{a^m} \quad \text{hay} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^m.$$

16. a) Ta biết rằng $S_n = \frac{u_m q - u_1}{q - 1}$. Tổng đã cho có thể viết :

$$S_1 + S_2 + ... + S_n = \frac{u_1 q - u_1}{q - 1} + \frac{u_2 q - u_1}{q - 1} + ... + \frac{u_n q - u_1}{q - 1}$$

$$= \frac{(u_1 + u_2 + ... + u_n)q}{q - 1} - \frac{u_1 n}{q - 1} = \frac{(u_n q - u_1)q}{(q - 1)^2} - \frac{u_1 n}{q - 1}.$$

b) Ta có : $\frac{1}{u_1^2 - u_2^2} + ... + \frac{1}{u_{n-1}^2 - u_n^2} = \frac{1}{1 - q^2}\left(\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + ... + \frac{1}{u_{n-1}^2}\right)$

$$= \frac{1}{1 - q^2} \cdot \frac{\frac{1}{u_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{q^2} - \frac{1}{u_1^2}}{\frac{1}{q^2} - 1} = q^2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2}\right)}{(1 - q^2)^2}.$$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Cho cấp số cộng và cấp số nhân có hai số hạng đầu và cuối giống nhau. Chứng minh rằng tất cả số hạng của cấp số cộng không lớn hơn các số hạng tương ứng của cấp số nhân.

- ***Giải :*** Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là cấp số cộng và $u_1, u_2, ..., u_n$ là cấp số nhân. Theo bài ra $a_1 = u_1$, $a_n = u_n$. Gọi q là công bội của cấp số nhân ta có : $u_n = u_1q^{n-1} = a_n$.

Đặt $a_1 + a_2 + ... + a_n = S$; $u_1 + u_2 + ... + u_n = T$.

Ta chứng minh rằng : $S \geq T$.

Ta có : $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2}.n = \dfrac{a_1 + a_1q^{n-1}}{2}.n = a_1.\dfrac{1 + q^{n-1}}{2}.n$

$$T = \frac{u_nq - u_1}{q - 1} = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Do $a_1 > 0$ nên chỉ cần chứng minh $\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \leq \dfrac{1 + q^{n-1}}{2}.n$.

Vế trái của bất đẳng thức này có thể viết :

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1 + q^{n-1}) + (q + q^{n-2}) + ... + (q^k + q^{n-k-1}) + ... + (q^{n-1} + 1)\right]$$

Từ đó ta chứng minh rằng : $q^k + q^{n-k-1} \leq 1 + q^{n-1}$.

Thật vậy : $q^k + q^{n-k-1} - 1 - q^{n-1} = (q^k - 1) + q^{n-k-1}(1 - q^k)$

$= (q^k - 1)(1 - q^{n-k-1}) \leq 0,$

vì nếu $q > 1$ thì $q^k - 1 \geq 0$, $1 - q^{n-k-1} \leq 0$, còn nếu $q < 1$ thì $q^k - 1 \leq 0$, $1 - q^{n-k-1} \geq 0$.

Với $q = 1$ thì rõ ràng tích ở vế trái bằng 0 và $q^k + q^{n-k-1} \leq 1 + q^{n-1}$.

Do mỗi biểu thức trong các dấu ngoặc không vượt quá $1 + q^{n-1}$ nên ta có : $\dfrac{q^n - 1}{q - 1} \leq n.\dfrac{1 + q^{n-1}}{2}$, tức là $T \leq S$.

17. a) Giả sử $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ và $\sqrt{5}$ là các số hạng của một cấp số cộng thì

$\sqrt{3} - \sqrt{2} = kd$, $\sqrt{5} - \sqrt{2} = md$ (d là công sai, k và m là các số nguyên).

Ta có : $k(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = m(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ hay $k\sqrt{5} - m\sqrt{3} = (k - m)\sqrt{2}$

Bình phương hai vế được : $5k^2 + 3m^2 - 2km\sqrt{15} = 2(k - m)^2$.

Từ đó : $\sqrt{15} = \dfrac{5k^2 + 3m^2 - 2(k-m)^2}{2km}$.

Do $\sqrt{15}$ là số vô tỉ nên điều này không thể xảy ra, tức là ba số $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ không thể là ba số hạng của một cấp số cộng.

Nếu ba số $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ là các số hạng của một cấp số nhân thì ta phải có (theo lời bình của bài 12) :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^m \quad \text{hay} \quad \frac{(\sqrt{3})^n}{(\sqrt{5})^m} = (\sqrt{2})^{n-m}.$$

Điều này không thể xảy ra !

b) Tương tự như trên, nếu ba số 11, 12, 13 lập thành một cấp số nhân thì ta phải có :

$$\left(\frac{12}{11}\right)^n = \left(\frac{13}{11}\right)^m \quad \text{hay} \quad \frac{12^n}{13^m} = 11^{n-m}.$$

Điều này không thể xảy ra !

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

a) Tìm bốn số lập thành một cấp số cộng, biết rằng nếu cộng thêm lần lượt các số 5, 6, 9, 15 vào bốn số đó thì lại được một cấp số nhân.

b) Tìm bốn số lập thành một cấp số nhân, biết rằng nếu cộng thêm lần lượt 4, 21, 29, 1 vào bốn số đó thì lại được một cấp số cộng.

Giải :

a) Gọi bốn số phải tìm là a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$.

Nếu lần lượt cộng thêm các số 5, 6, 9, 15 thì được một cấp số nhân, tức là : $a_1 + 5$, $a_1 + d + 6$, $a_1 + 2d + 9$, $a_1 + 3d + 15$.

Theo định nghĩa của cấp số nhân ta có thể viết dãy tỉ số sau :

$$\frac{a_1 + d + 6}{a_1 + 5} = \frac{a_1 + 2d + 9}{a_1 + d + 6} = \frac{a_1 + 3d + 15}{a_1 + 2d + 9}$$

Giải ra sẽ tìm được : $a_1 = 3$, $d = 3$.

Vậy bốn số phải tìm là : 3, 6, 9, 12.

b) Gọi bốn số phải tìm của cấp số nhân là : u_1, u_1q, uq^2, uq^3.

Nếu lần lượt cộng thêm 4, 21, 29, 1 thì được một cấp số cộng, tức là

$$u_1 + 4, \quad u_1q + 21, \quad u_1q^2 + 29, \quad u_1q^3 + 1.$$

Ta biết rằng mỗi số hạng của một cấp số cộng (trừ số hạng đầu tiên) là trung bình cộng của hai số hạng kề với nó, do đó ta có thể viết :

$$\begin{cases} u_1q + 21 = \frac{1}{2}(u_1 + 4 + u_1q^2 + 29) \\ u_1q^2 + 29 = \frac{1}{2}(u_1q + 21 + u_1q^2 + 1) \end{cases}$$

hay $\begin{cases} u_1q^2 - 2u_1q + u_1 = 9 \\ q(u_1q^2 - 2u_1q + u_1) = 36 \end{cases}$

Giải ra tìm được $q = 4$ và $u_1 = 1$.

Vậy bốn số phải tìm là : 1, 4, 16 và 64.

18. a) Theo bài ra ta có : $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 33\frac{3}{4}$ (1)

và $S = 36$ (2)

Như vậy từ (1) suy ra $u_1 = \frac{1 - q^4}{1 - q} = 33\frac{3}{4} = \frac{135}{4}$

Từ (2) ta có : $36 = \frac{u_1}{1 - q}$. Thay giá trị của u_1 vào được :

$$36(1 - q^4) = \frac{135}{4},\ \text{từ đó } q^4 = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} = \left(\pm\frac{1}{2}\right)^4$$

do đó công bội $q = \pm\frac{1}{2}$.

Với $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = 36 \times \frac{1}{2} = 18$;

Với $q = -\frac{1}{2}$ thì $u_1 = 36 \times \frac{3}{2} = 54$.

b) Theo bài ra ta có : $\frac{u_1}{1 - q} = 12{,}5$ và $u_1 + u_2 = u_1(1 + q) = 12$.

Thay $u_1 = 12{,}5(1 - q)$ vào đẳng thức thứ hai được :

$$12{,}5(1 - q^2) = 12 \quad \text{hay} \quad q^2 = 1 - \frac{12}{12{,}5} = \frac{0{,}5}{12{,}5} = \frac{1}{25}.$$

Do đó công bội $q = \pm\frac{1}{5}$.

Với $q = \frac{1}{5}$ thì $u_1 = 12{,}5.\frac{4}{5} = 10$;

Với $q = -\frac{1}{5}$ thì $u_1 = 12{,}5.\frac{5}{4} = 15$.

Vậy cấp số phải tìm là : 10; 2; 0,4; ... hoặc 15; –3; 0,6; ...

- ***Lời bình :*** Tương tự, *tìm tổng các số hạng của một cấp số nhân vô hạn biết rằng tổng ba số hạng đầu bằng 7 và tích của chúng bằng 8.*

Giải : Theo bài ra ta có : $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_1.u_2.u_3 = 8$, tức là có hệ :

$$\begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 7 \\ u^3q^3 = 8. \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai suy ra $uq = 2$. Thay $u = \frac{2}{q}$ vào phương trình thứ nhất được phương trình bậc hai $2q^2 - 5q + 2 = 0$ mà nghiệm là $\frac{1}{2}$ và 2. Loại giá trị 2 vì $|q| < 1$.

Với $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = 4$. Vậy tổng phải tìm là $S = \frac{u_1}{1 - q} = 8$.

19. a) Theo bài ra ta có $u_1 = 3$ và $S = \frac{7}{2}$. Do đó :

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{7}{2} = \frac{3}{1 - q}. \quad \text{Suy ra } q = \frac{1}{7}.$$

Cấp số nhân vô hạn phải tìm là : $3; \frac{3}{7}; \frac{3}{49}; \ldots$

b) Để chứng tỏ rằng các số đã cho có tạo thành một cấp số nhân vô hạn không ta phải chứng tỏ rằng các tỉ số $\frac{u_2}{u_1}$ và $\frac{u_3}{u_2}$ có bằng nhau không và chúng có nhỏ hơn 1 không. Ta có :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)}.\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = \frac{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})}{2(2 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Vì hai tỉ số trên bằng nhau nên công bội $q = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} < 1$, do đó ba số đã cho tạo thành một cấp số nhân vô hạn.

Vậy $S = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)\left(1 - \dfrac{1}{2 + \sqrt{2}}\right)} = \dfrac{(\sqrt{2} + 1)(2 + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = 4 + 3\sqrt{2}.$

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau :

Trong hình vuông cạnh a có hình vuông nội tiếp và trong hình vuông nội tiếp đó lại nội tiếp một hình vuông nữa, v.v... và cứ tiếp tục nội tiếp mãi. Tính tổng diện tích của tất cả hình vuông đó (hình 62).

Giải : Giả sử ABCD là hình vuông cạnh a, tức là có diện tích $S_1 = a^2$.

Với hình vuông nội tiếp $A_1B_1C_1D_1$ thì

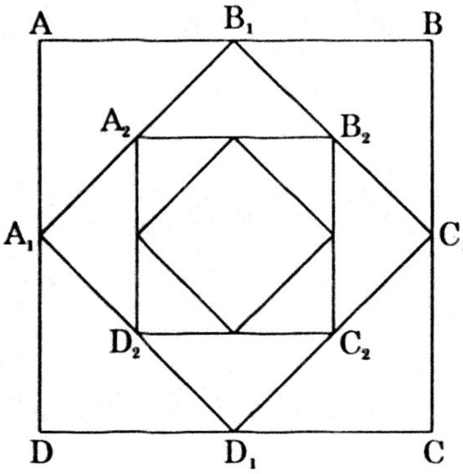
$$AA_1 = \frac{a}{n}, \quad BA_1 = \frac{(n-1)a}{n}.$$

Ngoài ra $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$.

Từ cạnh hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ ta có :

$$A_1B_1^2 = \frac{a^2}{n^2} + \frac{(n-1)^2a^2}{n^2}$$

$$= \frac{a^2}{n^2}\left[1 + (n-1)^2\right]$$



H.62

Giá trị này chính là S_2.

Với hình vuông $A_2B_2C_2D_2$, v.v..., ta có :

$$A_2A_1 = \frac{a\sqrt{1+(n-1)^2}}{n^2}, \qquad A_2B_1 = \frac{(n-1)a\sqrt{1+(n-1)^2}}{n^2},$$

....

$$S_3 = \frac{a^2\left[1+(n-1)^2\right]}{n^4} + \frac{a^2\left[1+(n-1)^2\right](n-1)^2}{n^4} = \frac{a^2}{n^4}\left[1+(n-1)^2\right]^2$$

$$S_4 = \frac{a^2\left[1+(n-1)^2\right]^2}{n^6} + \frac{a^2\left[1+(n-1)^2\right]^2(n-1)^2}{n^6} = \frac{a^2}{n^6}\left[1+(n-1)^2\right]^3$$

....

Ta nhận thấy rằng : $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{S_3}{S_2} = \dfrac{S_4}{S_3} = \ldots = \dfrac{1+(n-1)^2}{n^2}$,

do đó có dãy số $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots$ là các số hạng của cấp số nhân **lùi vô hạn với công bội bằng**

$$q = \frac{1+(n-1)^2}{n^2} < 1 \text{ và } S = \frac{a^2}{1 - \dfrac{1+(n-1)^2}{n^2}} = \frac{n^2a^2}{2(n-1)}.$$

Vậy $S = \dfrac{n^2a^2}{2(n-1)}; \quad n \geq 2.$

20. **Theo bài ra $|q| < 1$ và ta có :**

$$q^n = k(q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots) = k.q^{n+1}.\frac{1}{1-q} \qquad (1)$$

Từ đó $1 - q = kq$, vì thế nếu bài toán có nghiệm thì $q = \dfrac{1}{k+1}$ (2)

Ta nhận thấy rằng nếu ngược lại từ đẳng thức (2) suy ra được $|q| < 1$ thì (2) lại suy ra (1) và cấp số tương ứng thỏa mãn bài ra.

Như thế bài toán giải được với mọi k thỏa mãn bất đẳng thức $\left|\frac{1}{k+1}\right| < 1$, tức là với $k > 0$ hoặc $k < -2$.

- ***Lời bình :*** Giải thêm bài toán sau bằng phương pháp quy nạp :

Dãy số vô hạn $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_1 \neq 0)$ với $n \geq 3$ thỏa mãn điều kiện

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) = (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n)^2.$$

Chứng minh rằng $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ là các số hạng của một cấp số nhân.

Giải : Trước tiên ta xét trường hợp ba số hạng x_1, x_2, x_3.

Bỏ dấu ngoặc trong công thức :

$$(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + x_3^2) = (x_1x_2 + x_2x_3)^2 \quad \text{ta được :}$$

$$x_2^4 + x_1^2x_3^2 - 2x_1x_2^2x_3 = 0,$$

từ đó $(x_2^2 - x_1x_3)^2 = 0$ nên $x_1x_3 = x_2^2$.

Với điều kiện $x_1 \neq 0$ suy ra x_1, x_2, x_3 tạo thành một cấp số nhân.

Bây giờ giả sử điều khẳng định đúng với k $(k \geq 3)$ số hạng tức là $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (1) và giả sử q là công bội tương ứng. Ta chứng minh rằng nó cũng đúng với k + 1 số hạng, tức là $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ (2).

Ta viết điều kiện tương ứng như sau :

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_{k-1}^2 + x_k^2)(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_k^2 + x_{k+1}^2) =$$

$$= (x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1})^2 \qquad (3)$$

và để cho gọn ta đặt $(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{k-1}^2) = m^2$, với $m \neq 0$, vì $x_1 \neq 0$.

Ta có : $x_2 = qx_1, \quad x_3 = qx_2, \ldots, x_k = qx_{k-1}$ (4)

Vì thế đẳng thức (3) có thể viết :

$$(m^2 + x_k^2)(q^2m^2 + x_{k+1}^2) = (qm^2 + x_kx_{k+1})^2$$

Sau khi bỏ ngoặc và nhóm các số hạng ta được $(x_kq - x_{k+1})m^2 = 0$.

Vì $m \neq 0$ nên từ (4) ta có : $x_{k+1} = qx_k$.

Do đó dãy số $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ là một cấp số nhân với cùng công bội $q = \frac{x_2}{x_1}$.

Vậy cấp số vô hạn đã cho chính là một cấp số nhân.

D. BẠN CÓ BIẾT ?

I. Tam giác mà bình phương các cạnh tạo thành một cấp số cộng

1. Xét tam giác mà ba cạnh a, b, c thỏa mãn hệ thức $2b^2 = a^2 + c^2$, tức là bình phương độ dài các cạnh tạo thành một cấp số cộng. Tam giác này có một số tính chất đặc biệt sau đây.

Độ dài trung tuyến tính theo công thức :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2(a^2+b^2+c^2)-3a^2}{4}$$

Đặt $a^2 + b^2 + c^2 = q^2$ ta được các công thức sau để tính m_a, m_b, m_c :

$$m_a^2 = \frac{2q^2-3a^2}{4},\quad m_b^2 = \frac{2q^2-3b^2}{4},\quad m_c^2 = \frac{2q^2-3c^2}{4} \qquad (1)$$

Từ (1) suy ra :

a) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}q^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ (2)

b) nếu $a \geq b \geq c$ thì $m_a \leq m_b \leq m_c$ (3)

tức là cạnh lớn hơn của tam giác ứng với trung tuyến nhỏ hơn.

2. Vận dụng hệ thức $2b^2 = a^2 + c^2$, ta có thể giải các bài toán sau :

Bài toán 1. *Nếu trong ΔABC mà $2b^2 = a^2 + c^2$ thì $2m_b^2 = m_a^2 + m_c^2$, tức là bình phương các độ dài trung tuyến tương ứng cũng tạo thành một cấp số cộng.*

Thật thế, dựa vào công thức tính trung tuyến của một tam giác và điều kiện của bài toán ta có :

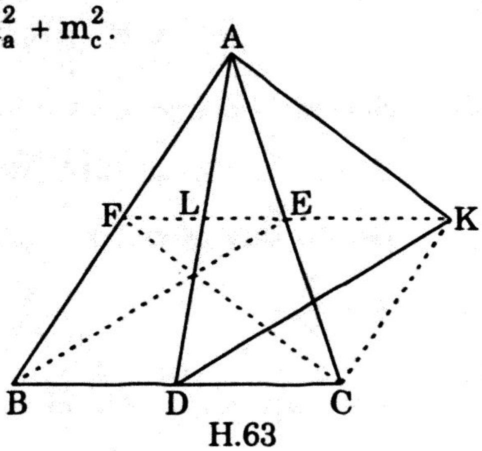
$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{3}{4}c^2$$

Tương tự : $m_c^2 = \frac{3}{4}a^2$, $m_b^2 = \frac{3}{4}b^2$.

Thế thì : $2m_b^2 = \frac{3}{4}.2b^2 = \frac{3}{4}(c^2+a^2) = m_a^2 + m_c^2$.

Trước khi hình thành điều kiện của bài toán 2, ta hãy dựng tam giác có cạnh là trung tuyến của ΔABC.

Giả sử AD, BE và CF là trung tuyến của ΔABC (hình 63). Nối đường trung bình FE rồi kéo dài CK // AB cắt FE tại K.



H.63

Nối K với A và D, dễ dàng chứng minh AK = CF và DK = BE, tức là ΔADK là tam giác phải dựng.

Gọi diện tích tam giác là S, từ cách dựng suy ra :

$AL = LD$, $BD = DC$, $FE = EK = 2LE$, ta được :

$$S_{ADK} = 2S_{ALK} = 2.3S_{ALE} = 6.\frac{1}{2}S_{AFE} = 3.\frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{3}{4}S_{ABC}$$

Vậy $S_2 = \frac{3}{4}S_1$ (trong đó $S_2 = S_{ADK}$ và $S_1 = S_{ABC}$).

Bài toán 2. *Tìm sự liên hệ giữa bình phương cạnh ΔABC (T_1) và tam giác từ trung tuyến của nó (T_2) để tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1.*

Nếu $T_2 \backsim T_1$ thì theo bất đẳng thức (3) sự tương ứng giữa cạnh với trung tuyến chỉ có thể là m_c và a, m_b và b, m_a và c. Như thế :

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{m_a^2}{c^2} = \frac{m_b^2}{b^2} = \frac{m_c^2}{a^2} = \frac{3}{4}.$$

Vì $\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{3}{4}$ nên $\frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$.

Từ đó : $2(b^2 + c^2) - a^2 = 3c^2$ và $2b^2 = c^2 + a^2$.

Vậy nếu $T_2 \backsim T_1$ thì bình phương độ dài các cạnh của tam giác T_1 tạo thành một cấp số cộng.

Đảo lại, nếu bình phương các cạnh ΔABC (T_1) và tam giác từ các trung tuyến của nó (T_2) tạo thành một cấp số cộng thì $T_1 \backsim T_2$.

Thật thế, giả sử $2b^2 = a^2 + c^2$ thế thì :

$$\frac{m_a^2}{c^2} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4c^2} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4c^2} = \frac{3}{4}$$

Tương tự : $\frac{m_b^2}{b^2} = \frac{3}{4}$ và $\frac{m_c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$, do đó :

$$\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ tức là } T_2 \backsim T_1.$$

* *Chú ý* : Tam giác mà độ dài bình phương độ dài trung tuyến tạo thành một cấp số cộng gọi là *"tam giác – tự trung tuyến"*. Tính chất của nó là đồng dạng với tam giác từ các trung tuyến của nó. Rõ ràng mỗi tam giác đều là tam giác – tự trung tuyến.

Giả sử ABC (T_1) là tam giác – tự trung tuyến. Dựng tam giác T_2 từ các trung tuyến của nó, ta lại được T_2 là tam giác – tự trung tuyến. Dựng tiếp tam giác T_3 từ trung tuyến của T_2 lại được T_3 là tam giác – tự trung tuyến, v.v...

Như vậy ta được một dãy tam giác – tự trung tuyến T_1, T_2, T_3, ..., T_k, T_{k+1}, ... với hệ số đồng dạng là $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

II. Tích của n số hạng của một cấp số nhân

Biết S_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân và A_n là tổng của n số hạng đầu tiên của dãy số mà các số hạng tương ứng với nghịch đảo các số hạng của cấp số đã cho ta có thể tính *tích của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân theo A_n và S_n theo công thức :*

$$\Pi_n = \left(\frac{S_n}{A_n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Thật vậy, giả sử ta có cấp số nhân a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}.

Tích của n số hạng đầu tiên của nó là :

$$\Pi_n = a.aq.aq^2...aq^{n-1} = a^n.q^{1+2+...+(n-1)} = a^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad (1)$$

Tổng của n số hạng đầu tiên của nó là : $S_n = \dfrac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ (2)

Các số hạng của dãy số tạo thành cấp số nhân là :

$\frac{1}{a}; \frac{1}{aq}; \frac{1}{aq_2}; ...; \frac{1}{aq^{n-1}}$, do đó :

$$A_n = \frac{\frac{1}{a}\left[\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{q^n - 1}{aq^{n-1}(q-1)} \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra : $\Pi_n = \left(\frac{S_n}{A_n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

III. Khám phá cấp số cộng từ các số hạng $\overline{aa}$ và $\overline{aaa}$

1. Số có hai chữ số giống nhau $\overline{aa}$

$11 = 14^2 - 11^2 - 8^2$, với $d = -3$ (d là công sai của cấp số cộng ÷ 14, 11, 8)

$44 = 28^2 - 22^2 - 16^2$, với $d = -6$

$55 = 9^2 - 5^2 - 1^2$ $(= 15^2 - 11^2 - 7^2)$, với $d = -4$

$88 = 56^2 - 43^2 - 30^2 - 17^2$, với $d = -13$

$99 = 16^2 - 11^2 - 6^2$ $(= 14^2 - 9^2 - 4^2)$, với $d = -5$

$99 = 42^2 - 33^2 - 24^2$, với $d = -9$.

2. Số có ba chữ số giống nhau $\overline{aaa}$

$111 = 47^2 - 37^2 - 27^2$, với $d = -10$ (d là công sai của cấp số cộng $\div$ 47, 37, 27)

$222 = 54^2 - 41^2 - 28^2 - 15^2 - 2^2$, với $d = -13$

$555 = 28^2 - 15^2 - 2^2$ $(= 50^2 - 37^2 - 24^2)$, với $d = -13$.

KONTUM:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH - 129 Phan Đình Phùng
LÂM ĐỒNG:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 09 Nguyễn Văn Cừ – Đà Lạt
CÔNG TY CP IN VÀ PHS – 18 Khu Hòa Bình – Đà Lạt
DĂK NÔNG:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 151 Hai Bà Trưng
NS GIÁO DỤC – 30 Trần Hưng Đạo – Gia Nghĩa
TÂY NINH:
NS VĂN NGHỆ – 295 Đường 30 tháng 4
LONG AN:
CÔNG TY PHS – 04 Võ Văn Tần – TX. Tân An
TIỀN GIANG:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 22 Hùng Vương – TP. Mỹ Tho
VĨNH LONG:
HS MƯỜI – 15 Lê Thái Tổ
CẦN THƠ:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 132 Đường 30 tháng 4
94 XÔ VIẾT NGHỆ TĨNH
HẬU GIANG:
CÔNG TY SÁCH TBTH – 50 Nguyễn Thái Học – TX Vị Thanh
ĐỒNG THÁP:
NS VIỆT HƯNG – 200 Nguyễn Huệ – TP. Cao Lãnh
BẾN TRE:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 03 Đồng Khởi
SÓC TRĂNG:
NS TRẺ – 41 Trần Hưng Đạo
AN GIANG:
TT VĂN HÓA TỔNG HỢP – 15 – 17 Hai Bà Trưng
BẠC LIÊU:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 59 Lý Thường Kiệt – Phường 3
TRUNG TÂM PHS – 57 Hoàng Văn Thụ
KIÊN GIANG:
NS ĐÔNG HỒ I – 98B Trần Phú – Rạch Giá
NS ĐÔNG HỒ II – 989 Nguyễn Trung Trực – Rạch Giá
CÀ MAU:
CÔNG TY CP SÁCH TBTH – 26 – 28 Lê Lợi – Phường 2
TRÀ VINH:
NS LIÊN SƯƠNG – 127 Trần Quốc Tuấn
BÌNH DƯƠNG:
NHÀ SÁCH 277 – 518 Cách Mạng Tháng Tám – Thủ Dầu Một

SÁCH CÓ BÁN LẺ TẠI CÁC CỬA HÀNG SÁCH TRÊN TOÀN QUỐC